Kolokwium zaliczeniowe z mechaniki kwantowej

27.01.2013 poniedziałek, godz. 14:15-15:55, sala 001B

ROZWIĄZANIA

1. Atom wodoru jest w stanie 2p, takim że $L_x = +\hbar$. W chwili $t = 0$ zostaje włączone pole magnetyczne $\vec{B}$ (takie, że można zaniedbać efekty spinowe i efekty rzędu B^2) równoległe do osi z. Obliczyć czasową zależność średniej $\langle L_x \rangle$.

   WSKAZÓWKA: skorzystać z faktu, że $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$.

   ROZWIĄZANIE:

   Funkcja własna operatora L_x jest kombinacją stanów własnych L_z:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|1,1\rangle + \beta\,|1,-1\rangle + \gamma\,|1,0\rangle\,.$$

   Rozpisujemy

$$L_x = \frac{1}{2}\left(L_+ + L_-\right).$$

   Mamy

$$\begin{aligned} L_x\,|\psi\rangle &= \alpha\frac{1}{2}L_-\,|1,1\rangle + \beta\frac{1}{2}L_+\,|1,-1\rangle + \gamma\frac{1}{2}\left(L_+ + L_-\right)|1,0\rangle \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}L_+\,|1,0\rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle + |1,-1\rangle\right). \end{aligned}$$

   Stąd:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} = \gamma,\ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} = \beta = \alpha.$$

   Czyli (po unormowaniu):

$$|\psi\rangle = \alpha\left(|1,1\rangle + |1,-1\rangle + \sqrt{2}\,|1,0\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle + |1,-1\rangle + \sqrt{2}\,|1,0\rangle\right).$$

   Hamiltonian ma postać:

$$H = H_0 - \mu B\frac{L_z}{\hbar},\ \mu = \frac{|e|\,\hbar}{2mc}$$

   Ewolucja czasowa

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle\,e^{+i\mu Bt/\hbar} + |1,-1\rangle\,e^{-i\mu Bt/\hbar} + \sqrt{2}\,|1,0\rangle\right)e^{-iE_0t/\hbar}.$$

   Mamy

$$\begin{aligned} L_x\,|\psi(t)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle\,e^{+i\mu Bt/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle\,e^{-i\mu Bt/\hbar} + |1,1\rangle + |1,-1\rangle\right)e^{-iE_0t/\hbar} \\ &= \frac{\hbar}{2}\left(|1,1\rangle + |1,-1\rangle + \sqrt{2}\cos\frac{\mu Bt}{\hbar}\,|1,0\rangle\right). \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned}\langle\psi(t)|\, L_x\, |\psi(t)\rangle &= \frac{\hbar}{4}\left(e^{-i\mu Bt/\hbar} + e^{+i\mu Bt/\hbar} + 2\cos\frac{\mu Bt}{\hbar}\right)\\ &= \hbar\cos\frac{\mu Bt}{\hbar} = \hbar\cos\frac{|e|\,Bt}{2mc}.\end{aligned}$$

2. Cząstka bezspinowa poruszająca się w potencjale sferycznym jest w stanie opisanym funkcją falową

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,(x+iy+z)\,\frac{g(r)}{r},$$

gdzie

$$\int_0^\infty dr\,|g(r)|^2\,r^2 dr = 1.$$

(a) Jakie są możliwe wyniki pomiaru L_z elektronu w tym stanie?

(b) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania wyników z punktu (a)?

(c) Ile wynosi oczekiwana wartość L_z?

WSKAZÓWKA:

$$\begin{aligned}Y_1^0 &= \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\theta,\\ Y_1^{\pm1} &= \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}.\end{aligned}$$

ROZWIĄZANIE:

Mamy

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ z = \cos\vartheta$$

czyli

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(e^{i\varphi}\sin\vartheta + \cos\vartheta\right)g(r) = \sqrt{\frac{1}{3}}(-\sqrt{2}Y_1^1 + Y_1^0)g(r).$$

Możliwe wyniki pomiarów L_z wynoszą $+\hbar$ oraz 0 z prawdopodobieństwami 2/3 i 1/3. Średnie L_z wynosi $2\hbar/3$.

3. Oscylator harmoniczny znajdował, się w dalekiej przeszłości w zadanym stanie $|k\rangle$. Obliczyć w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo przejścia w dalekiej przyszłości do stanu $|n\rangle$ (jaki to może być stan?) pod wpł,ywem **jednorodnego pola siły**

$$f(t) = -f_0 e^{-\delta t},\ H'(t) = x f_0 e^{-\delta|t|}$$

gdzie δ jest ustalonym parametrem. Przedyskutować granice $\delta \to \infty$ i $\delta \to 0$ (wykonać wykresy prwdopodobieństwa przejścia dla różnych wartości δ).

WSKAZÓWKA:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{p},\\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{p}.\end{aligned}$$

ROZWIĄZANIE:

Mamy

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

czyli

$$H'(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} f_0 e^{-\delta|t|}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger).$$

Amplituda prześcia w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń:

$$a_n^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, \langle n|\, \hat{H}'(t)\, |k\rangle\; e^{i\omega_{nk}t}.$$

Niezerowe elementy macierzowe H'

$$\begin{aligned}\langle n = k+1|\, \hat{H}'(t')\, |k\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar(k+1)}{2m\omega}} f_0 e^{-\delta|t|},\ \omega_{nk} = \omega.\\ \langle n = k-1|\, \hat{H}'(t')\, |k\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar k}{2m\omega}} f_0 e^{-\delta|t|},\ \ \omega_{nk} = -\omega,\end{aligned}$$

Mamy zatem

$$a_{k\pm1}^{(1)} = -i f_0 \sqrt{\frac{k + 1/2 \pm 1/2}{2\hbar m\omega}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-\delta|t'|}\, e^{\pm i\omega t'}.$$

Liczymy całkę:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\delta|t|}\, e^{\pm i\omega t} &= \int\limits_{-\infty}^{0} dt\, e^{(\delta\pm i\omega)t} + \int\limits_{0}^{\infty} dt\, e^{(-\delta\pm i\omega)t}\\ &= \frac{1}{\delta \pm i\omega} + \frac{1}{\delta \mp i\omega} = \frac{2\delta}{\delta^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo:

$$P_{k\to k\pm1} = f_0^2 \frac{k + 1/2 \pm 1/2}{2\hbar m\omega}\left(\frac{2\delta}{\delta^2 + \omega^2}\right)^2$$