Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa I, zestaw 8

19.4.2011. wtorek, godz. 8:15

sala 128

1. Czy istnieją skończenie wymiarowe macierze A, B spełniające regułę komutacji
$$[A, B] = i\hbar.$$

2. Znaleźć jawną postać (nieznormalizowanej) funkci falowej stanu $|z\rangle$ w reprezentacji położeń $\psi_z(x) = \langle x|\, z\rangle$ oraz w przestrzeni pędów $\tilde{\psi}_z(p) = \langle p|\, z\rangle$. Obie te funkcje można znaleźć rozwiązując równania różniczkowe odpowiadające:
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_z(\xi) &= z\,\psi_z(\xi), \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\pi + \frac{d}{d\pi}\right)\tilde{\psi}_z(\pi) &= z\,\tilde{\psi}_z(\pi), \end{aligned}$$
gdzie $\pi = p/\sqrt{m\hbar\omega} = -id/d\xi$, $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x = id/d\pi$.

3. Jak wygląda ewolucja w czasie stanu $|z\rangle$? Proszę wyliczyć z zależnego od czasu równania Schrödingera zależność czasową stanów $|n\rangle$ i podstawić do wzoru na $|z\rangle$ uwzględniając znane wyrażenie na energię stanów własnych oscylatora harmonicznego. Zakładając, że w chwili $t = 0$ układ jest w stanie $z = \rho e^{i\varphi}$ pokazać, że w chwili poźniejszej t układ jest też w stanie kwaziklasycznym
$$e^{-i\omega t/2}\,|z\,(t)\rangle$$
gdzie $z(t) = \rho e^{-i(\omega t - \varphi)}$. Wyliczyć średnie $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w tym stanie (najlepiej korzstając z wyników zadania z poprzedniego zestawu).

4. Konstrukcja stanu "kota Schrödingera".

   W przedziale czasowym $t \in [0, T]$, dodajemy do hamiltonianu oscylatora harmonicznego człon
$$\hat{W} = g\hbar(\hat{a}^\dagger a)^2. \tag{1}$$
   Stała g jest na tyle duża ($g \gg \omega$, $\omega T \ll 1$), że dla $0 \leq t \leq T$
$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{osc}} + \hat{W} \simeq \hat{W}. \tag{2}$$
   W chwili $t = 0$ układ jest w stanie $|\psi(0)\rangle = |z\rangle$.

   (a) Znaleźć ewolucję czasową stanu $|\psi(t)\rangle$ gdy hamiltonian ma postać (2). W tym celu zapisać $|\psi(t)\rangle$ w bazie stanów $|n\rangle$ i rozwiązać zależne od czasu równanie Schrödingera. Skorzystać z faktu, że $(\hat{a}^\dagger a)^2\,|n\rangle = n^2\,|n\rangle$.

(b) Stan $|\psi(T)\rangle$ znacznie się upraszcza dla $T = 2\pi/g$ lub $T = \pi/g$. Jak wyglądają stany $|\psi(T)\rangle$ dla tych wartości T?

(c) Wybieramy $T = \pi/2g$. Wykazać, że wtedy

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{-i\pi/4} |z\rangle + e^{i\pi/4} |-z\rangle \right\} . \tag{3}$$

(d) Załóżmy, że $z = i\rho$. Przedyskutować fizyczną interpretację stanów $|z\rangle$ i $|-z\rangle$. Ile wynoszą średnie położenia i jak skierowane są średnie pędy w tych stanach? Dla $\rho \to \infty$ stany $|z\rangle$ i $|-z\rangle$ są makroskopowo różne, dlatego stan $|\psi(T)\rangle$ można uważać za konkretną realizację "kota Schrödingera".