Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa I, zestaw 7

12.4.2011. wtorek, godz. 8:15

sala 128

1. Czy istnieją skończenie wymiarowe macierze A, B spełniające regułę komutacji
$$[A, B] = i\hbar.$$

2. Operatory kreacji i anihilacji mają postać:
$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\hat{p},$$
$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\hat{p}.$$
Stan podstawowy oscylatora harmonicznego spełnia równanie
$$\hat{a}\left|0\right\rangle = 0.$$
Znaleźć funkcję falową tego stanu korzystając z jawnej postaci operatorów $\hat{x}$ oraz $\hat{p}$ w reprezentacji położeń. Następnie wyliczyć pierwszy stan wzbudzony korzystając z równania
$$\left|1\right\rangle = \hat{a}^\dagger\left|0\right\rangle.$$
Porównać ze znanymi wzorami z wykładu.

3. Skonstruować stan własny operatora anihilacji (nazywany stanem koherentnym lub kwaziklasyczym):
$$\hat{a}\left|z\right\rangle = z\left|z\right\rangle. \tag{1}$$
Wtym celu rozwinąć $\left|z\right\rangle$ w bazie stanów własnych oscylatora harmonicznego, znaleźć i rozwiązać rekurencję dla współczynników tego rozwinięcia.

4. Wyliczyć normalizację stanu koherentnego. (Odp. $\left|z\right\rangle = \exp(-\left|z\right|^2/2)\sum z^n/n!\left|n\right\rangle$.) Wyliczyć średnie $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w tym stanie i średnie odchylenia kwadratowe. Sprawdzić zasadę nieoznaczoności.

5. Znaleźć jawną postać (nieznormalizowanej) funkci falowej stanu $\left|z\right\rangle$ w reprezentacji położeń $\psi_z(x) = \left\langle x\right| z\rangle$ oraz w przestrzeni pędów $\tilde{\psi}_z(p) = \left\langle p\right| z\rangle$. Obie te funkcje można znaleźć rozwiązując równania różniczkowe odpowiadające (1):
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_z(\xi) &= z\,\psi_z(\xi),\\ \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\pi + \frac{d}{d\pi}\right)\tilde{\psi}_z(\pi) &= z\,\tilde{\psi}_z(\pi),\end{aligned}$$
gdzie $\pi = p/\sqrt{m\hbar\omega} = -id/d\xi$, $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x = id/d\pi$.