Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa I, zestaw 4

22.3.2006. wtorek, godz. 8:15

sala 128

1. Udowodnić, że iloczyn skalarny w reprezentacji położeniowej ma postać:

$$\langle\varphi\,|\psi\rangle = \int dx\,\varphi^*(x)\psi(x).$$

2. W tej notacji element macierzowy operatora $\hat{O}$ daje się zapisać jako

$$\langle\varphi|\,\hat{O}\,|\psi\rangle = \int dx\,\varphi^*(x)\left[\hat{O}\psi(x)\right].$$

Sprzężenie hermitowskie operatora $\hat{O}$ oznaczamy $\hat{O}^\dagger$ i definiujemy jako

$$\langle\varphi|\,\hat{O}^\dagger\,|\psi\rangle^* = \langle\psi|\,\hat{O}\,|\varphi\rangle\,.$$

Wykazać, że lewa strona tej równości daje się zapisać

$$\langle\varphi|\,\hat{O}^\dagger\,|\psi\rangle^* = \int dx\,\left[\hat{O}^\dagger\psi(x)\right]^*\varphi(x).$$

Jeżeli zachodzi $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$ to operator nazywamy hermitowskim. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem czy operatory

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx},\ \hat{x} = x,\ \frac{d}{dx},\ \hat{L}_i = (\hat{r}\times\hat{p})_i$$

są hermitowskie. Dla operatora momentu pędu $\hat{L}_i$ należy zamienić $dx \to d^3r$.

3. Udowodnić, że iloczyn operatorów hermitowskich jest operatorem hermitowskim.

4. Udowodnić tożsamość Jacobiego.

5. Wykazać:

$$\left[\hat{A},\frac{1}{\hat{B}}\right] = -\frac{1}{\hat{B}}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\frac{1}{\hat{B}}.$$