Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 13

grupa 1: poniedziałek 23.1.2012., godz. 14:05, sala 001B

1. Klasycznie rozpraszaniu ulegają tylko cząstki, które padają na sztywną (nieskończoną) kulę w odległości nie większej niż a od osi z przebiegającej przez środek kuli. Takie cząstki mają maksymalny moment pędu $L \sim pa$ czyli $l \sim ka$. Spróbujmy we wzorze na przekrój czynny

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k)$$

wysumować wszystkie fale parcjalne od $l = 0$ do $l = ka$. W tym celu przyjąć, że $\delta_{l+1} = \delta_l - \pi/2$ (dlaczego?). Wykazać, że w takim przybliżeniu $\sigma \sim 2\pi a^2$.

2. Cząstka o spinie 1/2 jest związana w potencjale sferycznym. Część kątowa funkcji falowej dana jest zatem przez funkcje kuliste a całkowity moment pędu j jest złożeniem spinu i momentu pędu l. Sama funkcja falowa w przypadku nierelatywistycznym jest dwukomponentowym spinorem Ω. Na wykładzie zdefiniowaliśmy:

$$\begin{aligned}
\Omega^{(+)}_{j,j_3,l=j-1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{bmatrix} \sqrt{j+j_3}\,Y^{j_3-1/2}_{j-1/2} \\ \sqrt{j-j_3}\,Y^{j_3+1/2}_{j-1/2} \end{bmatrix}, \\
\Omega^{(-)}_{j,j_3,l=j+1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2j+2}} \begin{bmatrix} \sqrt{j+1-j_3}\,Y^{j_3-1/2}_{j+1/2} \\ -\sqrt{j+1+j_3}\,Y^{j_3+1/2}_{j+1/2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Wykazać, że dla dowolnych j, j_3 zachodzi

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\Omega^{(\mp)}_{j,j_3,l=j\pm 1/2} = \Omega^{(\pm)}_{j,j_3,l=j\mp 1/2}. \tag{1}$$

WSKAZÓWKA

W tym celu proszę skorzystać z faktu, że składowe wektora wodzącego $\vec{n}$ tworzą nieredukowalny operator tensorowy o spinie 1, $O^{(1)}_m$, gdzie $m = -1, 0, 1$. Wynika to z faktu, że

$$\begin{aligned}
n_+ &= n_x + i n_y = -\sqrt{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,1}(\theta,\varphi), \\
n_- &= n_x - i n_y = \sqrt{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,-1}(\theta,\varphi), \\
n_z &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta,\varphi),
\end{aligned}$$

co daje

$$n_+ = -\sqrt{2}O^{(1)}_1,\ n_z = O^{(1)}_0,\ n_- = \sqrt{2}O^{(1)}_{-1}. \tag{2}$$

Elementy macierzowe operatora $O^{(1)}_m$ można wyrazić przez współczynniki Clebscha-Gordana i zredukowane elementy macierzowe $\mathcal{N}_n$

$$\begin{aligned} O^{(1)}_m Y_{l,l_3} &= \mathcal{N}_n(l+1,l)\left(\begin{array}{cc|c} l & 1 & l+1 \\ l_3 & m & m+l_3 \end{array}\right) Y_{l+1,m+l_3} \\ &+\mathcal{N}_n(l,l)\left(\begin{array}{cc|c} l & 1 & l \\ l_3 & m & m+l_3 \end{array}\right) Y_{l,m+l_3} \\ &+\mathcal{N}_n(l-1,l)\left(\begin{array}{cc|c} l & 1 & l-1 \\ l_3 & m & m+l_3 \end{array}\right) Y_{l-1,m+l_3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Wiemy, że

$$\mathcal{N}_n(l,l) = 0. \tag{4}$$

co wynika z r z zachowania parzystości. Dwa potrzebne we wzorze (3) zredukowane elementy macierzowe były podane wcześniej na wykładzie:

$$\mathcal{N}_n(l+1,l) = \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}},\ \mathcal{N}_n(l-1,l) = -\sqrt{\frac{l}{2l-1}}.$$