Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 8

grupa 1: poniedziałek 5.12.2012., godz. 14:05, sala 001B

1. W atomie wodoru elektron oddziaływuje z momentem magnetycznym powstałym na wskutek względnego ruchu protonu i elektronu. Oddziaływanie to nosi nazwę „spin-orbita". Traktując sprzężenie „spin-orbita" jako zaburzenie

$$\hat{H}_{\mathrm{SO}} = \frac{e^2\hbar^2}{2m_e^2c^2}\frac{1}{r^3}\frac{1}{\hbar^2}\hat{L}\cdot\hat{S}$$

obliczyć poprawki do energii stanów $2s$ i $2p$. Podać numeryczną wartość poprawki w [eV] i w [cm^{-1}].

WSKAZÓWKA: Ponieważ oddziaływanie „spin-orbita" jest diagonalizowane przez f. falowe w bazie całkowitego krętu j, należy najpierw skonstuować takie funkcje, a potem policzyć odpowiednie elementy macierzowe.

$$\begin{aligned}
\psi^{n=2}_{l=0,m=0} &= \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}Y^{m=0}_{l=0}(\theta,\varphi) = R_{20}(r)Y^{m=0}_{l=0}(\theta,\varphi),\\
\psi^{n=2}_{l=1,m} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}Y^{m}_{l=1}(\theta,\varphi) = R_{21}(r)Y^{m}_{l=1}(\theta,\varphi).
\end{aligned}$$

2. Oznaczamy stany własne spinu $|\pm\rangle = |1/2,\pm 1/2\rangle$. Stan

$$|s\rangle = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$$

jest unormowany.

- Obliczyć
$$\langle\vec{\sigma}\rangle = \langle s|\,\vec{\sigma}\,|s\rangle \text{ gdzie } \vec{\sigma} = (\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)\,.$$
Wykazać, że $\langle\vec{\sigma}\rangle$ jest wektorem jednostkowym.
- Pokazać, że stan $|s\rangle$ jest stanem własnym operatora $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ do wartości własnej 1, gdzie $\vec{n}$ jest odpowiednio dobranym wektorem jednostkowym. Znaleźć $\vec{n}$.
- Pokazać, że wartość oczekiwana w stanie $|s\rangle$ operatora $\vec{n}'\cdot\vec{\sigma}$, gdzie $\vec{n}'$ jest dowolnym wektorem jednostkowym, wynosi $\vec{n}'\cdot\vec{n}$.
- Przy pomocy macierzy jednostkowej i macierzy $\vec{\sigma}$ skonstruować operator rzutowy P_+ na stan $|+\rangle$, P_- na stan $|-\rangle$, oraz operator rzutowy P_n na stan $|s\rangle$. Operator rzutowy, to operator który z dowolnego stanu wybiera tylko składową „wzdłuż" tego stanu (np. $P_+\,|+\rangle = |+\rangle$, $P_+\,|-\rangle = 0$).
- Obliczyć P_+^2, P_-^2, P_n^2, P_+P_- oraz $P_+ + P_-$.

3. W doświadczeniu Sterna-Gerlacha wiązka atomów o momencie magnetycznym

$$\vec{\mu} = -g_J \mu_B \frac{1}{\hbar} \vec{J}$$

przechodzi przez obszar, w którym niejednorodne pole magnetyczne ma gradient wzdłuż osi o kierunku $\vec{n}$. Siła działająca na atomy dana jest wzorem

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}.$$

Zakładając, że $\vec{n} = \vec{n}_z = (0, 0, 1)$, oszacować jaki procent cząstek odchyli się w dodatnim i ujemnym kierunku osi z przyjmując, że

- wiązka atomów jest spolaryzowana wzdłuż osi z, tzn. 100% jest w stanie własnym s_z do warości własnej $\hbar/2$;
- wiązka atomów jest niespolaryzowana, tzn. że 50% atomów jest w stanie $|1/2, 1/2\rangle$ i 50% w stanie $|1/2, -1/2\rangle$;
- wiązka atomów jest spolaryzowana wzdłuż osi x, tzn. 100% jest w stanie własnym s_x do warości własnej $\hbar/2$.