

# Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa I, zestaw 1

10.10.2012. wtorek, godz. 14:15

sala 001B

1. Operatory momentu pędu zdefiniowane są jako

$$\hat{L}_i = (\hat{r} \times \hat{p})_i \text{ gdzie } i = 1, 2, 3 \text{ (lub alternatywnie } x, y, z)$$

Wyliczyć komutator

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j].$$

Operator Casimira zdefiniowany jest jako suma kwadratów

$$\hat{L}^2 = \sum_{i=1}^3 \hat{L}_i^2.$$

Obliczyć komutator

$$[\hat{L}_i, \hat{L}^2].$$

2. Definiujemy operatory

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2.$$

Wyliczyć komutatory:

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-], \quad [\hat{L}_{\pm}, \hat{L}_3].$$

Wykazać, że

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_- \hat{L}_+ + \hat{L}_3^2 + \hat{L}_3 = \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_3^2 - \hat{L}_3.$$

3. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że macierze

$$T_i = \frac{\hbar}{2} \tau_i,$$

gdzie  $\tau_i$  są macierzami Pauliego spełniającymi reguły komutacji wyliczone dla operatorów  $\hat{L}_i$  z poprzedniego zadania. Obliczyć operator Casimira  $\sum \hat{T}_i^2$ .

4. Powtórzyć obliczenia z zad. 2 dla macierzy

$$\left( \hat{J}_k \right)_{lm} = -i\hbar \varepsilon_{klm},$$

gdzie  $\varepsilon_{klm}$  jest całkowicie antysymetrycznym tensorem Levi-Civity. Proszę zwrócić uwagę, że indeks  $k$  w definicji  $\hat{J}_k$  numeruje daną macierz  $3 \times 3$ , natomiast indeksy  $lm$  numerują wiersze i kolumny tej macierzy

5. Operatory  $\hat{L}_i$  mają szczególnie prostą jawną postać w kartezjańskim układzie współrzędnych. Znaleźć ich jawną postać w sferycznym układzie współrzędnych.

6. Okaże się, że we współrzędnych sferycznych operator  $\hat{L}_z = -i\hbar \partial/\partial\varphi$ , gdzie  $\varphi$  jest kątem azymutalnym. Jest to analogiczna postać, jak dla operatora pędu w jednym wymiarze (trzeba zastąpić  $\varphi$  przez  $x$ ), co sugeruje, że dla średniego odchylenia kwadratowego  $\langle \Delta \hat{L}_z^2 \rangle$  i  $\langle \Delta \varphi^2 \rangle$  zachodzi relacja nieoznaczoności. Jednakże nieoznaczoność kąta  $\varphi$  nie może być większa niż  $\pi$ , a więc pojawia się sprzeczność. Jak ją rozwiązać?