31 Równanie Diraka c.d.

31.1 Oddziaływanie z polem elektromagnetycznym

Oddziaływanie z zewnętrznym polem elektromagnetycznym wprowadzamy stosując *zasadę minimlnego sprzężnia*

$$
\begin{aligned}
c\vec{p} &\to c\vec{p} - q\vec{A}, \\
E &\to E - qV.
\end{aligned}
\tag{31.1}
$$

Równanie Diraka przyjmuje wówczas postać:

$$
\left((E - qV) - \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A}) - \beta mc^2\right)\psi = 0. \tag{31.2}
$$

Mnożąc równanie (31.2) przez

$$
\left((E - qV) + \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A}) + \beta mc^2\right)
$$

dostajemy

$$
\begin{aligned}
D^2 &= \left((E - qV) + \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A}) + \beta mc^2\right)\left((E - qV) - \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A}) - \beta mc^2\right) \\
&= (E - qV)^2 - m^2c^4 - \left(\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A})\right)^2 \\
&- (E - qV)\ \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A}) + \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A})\ (E - qV)\,.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że człony $\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A})\beta mc^2$ oraz $(E - qV)\,\beta mc^2$ kasują się.

Wyliczmy drugi człon postaci

$$
\vec{\alpha}\cdot\vec{a}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{b}.
$$

Ponieważ

$$
\alpha_i\alpha_j = \frac{1}{2}\{\alpha_i, \alpha_j\} + \frac{1}{2}[\alpha_i, \alpha_j] = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\Sigma_k. \tag{31.3}
$$

Stąd

$$
\vec{\alpha}\cdot\vec{a}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{\Sigma}. \tag{31.4}
$$

Mamy więc

$$
\left(\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A})\right)^2 = (c\vec{p} - q\vec{A})^2 + (c\vec{p} - q\vec{A})\times(c\vec{p} - q\vec{A})\cdot\vec{\Sigma}. \tag{31.5}
$$

Drugi człon nie znika

$$
(c\vec{p} - q\vec{A})\times(c\vec{p} - q\vec{A}) = -qc\left(\vec{A}\times\vec{p} + \vec{p}\times\vec{A}\right) = i\hbar qc\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = i\hbar qc\vec{B}, \tag{31.6}
$$

gdzie $\vec{B}$ jest polem magnetycznym. Stąd

$$
-\left(\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A})\right)^2 = -(c\vec{p} - q\vec{A})^2 + \hbar qc\,\vec{B}\cdot\vec{\Sigma}. \tag{31.7}
$$

Z kolei

$$
\begin{aligned}
&-(E-qV)\ \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A})+\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A})\ (E-qV)\\
&=q\,\vec{\alpha}\cdot\left(E\vec{A}-\vec{A}E\right)+qc\,\vec{\alpha}\cdot(V\vec{p}-\vec{p}V)\\
&=iq\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{\nabla}V\right)=-iq\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{E},
\end{aligned}
\tag{31.8}
$$

gdzie wektor $\vec{E}$ (w odróznieniu od energii E) oznacza pole elektryczne:

$$
\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}V.
$$

Wreszcie dokonamy przybliżenia nierelatywistycznego definiując energię *nierelatywistyczną* E'

$$
E=E'+mc^2, \tag{31.9}
$$

gdzie człon mc^2 uważamy za duży. Wówczas

$$
\begin{aligned}
(E-qV)^2-m^2c^4&=\left(E'+mc^2-qV\right)^2-m^2c^4\\
&=(E'-qV)^2+2mc^2\,(E'-qV)\,.
\end{aligned}
\tag{31.10}
$$

Zaniedbując pierwszy człon, mamy

$$
D^2=2mc^2\,(E'-qV)-(c\vec{p}-q\vec{A})^2+\hbar qc\,\vec{B}\cdot\vec{\Sigma}-iq\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{E} \tag{31.11}
$$

i w konsekwencji równanie Diraka możemy zapisać jako

$$
\left(\frac{1}{2mc}(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})^2+qV-\frac{\hbar q}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{\Sigma}+\frac{iq\hbar}{2mc}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{E}\right)\psi=E'\psi. \tag{31.12}
$$

Pierwsze dwa człony w równaniu (31.12) odpowiadają hmiltonianowi cząstki bezspinowej w polu elektromagnetycznym $(V,\vec{A})$. Drugi człon (dla $q=-e$) ma postać

$$
-\frac{\hbar q}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{\Sigma}=2\frac{e\hbar}{2mc}\frac{1}{\hbar}\vec{S}\cdot\vec{B}=g_s\mu_B\frac{1}{\hbar}\vec{S}\cdot\vec{B}, \tag{31.13}
$$

gdzie operator spinu ma postać

$$
\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}.
$$

Hamiltonian (31.13) pokrywa się z wcześniej wprowadzonym hamiltonianem Pauliego, z tym że otrzymaliśmy wynik

$$
g_s=2. \tag{31.14}
$$

Ostatni człon $\vec{\alpha}\cdot\vec{E}$ zawiera tylko elementy pozadigonalne, a więc miesza górne składowe bispinora Diraka z dolnymi, które są małe, rzędu (v/c) i możemy je zaniedbać.

Systematyczne rozwinięcie równania Diraka w potęgi (v/c) nosi nazwę transformcji Foldy-Wouthuyusen'a i wykracza poza zakres tego wykładu.

31.2 Atom wodoru

Aby zlaeźć rozwiązanie równania Diraka dla potencjału Coulomba

$$V = -\frac{Ze^2}{r}$$

musimy najpierw rozseparować zmienne na część kątową i radialną. Zauważmy, że całkowity moment pędu, który jest jest sumą

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{r} \times \vec{p} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \tag{31.15}$$

komutuje (wyakazać!) z hamiltonianem

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + V(r). \tag{31.16}$$

Zatem dobre liczby kwntowe to energia E, J^2 oraz J_z. Ponieważ całkowity moment pędu wynosi $j \pm 1/2$ i ponieważ operator spinu $\vec{\Sigma}$ jest blokowo diagonalny

$$\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \tag{31.17}$$

czterokomponentowe bispinory możemy zapisać jako

$$\psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} \tag{31.18}$$

gdzie każdy z dwuwymiarowych spionrów φ i χ można z osobna rozseparować na część radialną i kątową. W tym celu skonstruujmy spinory odpowiadające $j = l \pm 1/2$:

$$\begin{aligned} |j = l + 1/2, m\rangle &= \sqrt{\frac{l+m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m-1/2} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{l-m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m+1/2} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \\ |j = l - 1/2, m\rangle &= \sqrt{\frac{l-m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m-1/2} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{l+m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m+1/2} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \end{aligned}$$

czyli jawnie

$$\begin{aligned} \Omega_{jm}^{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{bmatrix} \sqrt{l+m+1/2}\,Y_l^{m-1/2} \\ \sqrt{l-m+1/2}\,Y_l^{m+1/2} \end{bmatrix}, \\ \Omega_{jm}^{(-)} &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{bmatrix} \sqrt{l-m+1/2}\,Y_l^{m-1/2} \\ -\sqrt{l+m+1/2}\,Y_l^{m+1/2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{31.19}$$

Zauważmy, że spinor $\Omega_{jm}^{(-)}$nie istnieje dla $l = 0$. Spinory Ω spełniają tożsamości

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \Omega_{jm}^{(\pm)} &= \hbar^2 j(j+1) \vec{J}^2 \Omega_{jm}^{(\pm)}, \\ \vec{L} \cdot \vec{S}\, \Omega_{jm}^{(\pm)} &= \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right) \Omega_{jm}^{(\pm)} = -\frac{\hbar^2}{2}(1 \mp \kappa) \Omega_{jm}^{(\pm)}, \end{aligned} \tag{31.20}$$

gdzie

$$\kappa = -(l+1) = -\left(j+\frac{1}{2}\right) \quad \text{dla} \quad j = l+\frac{1}{2},$$
$$\kappa = +l = +\left(j+\frac{1}{2}\right) \quad \text{dla} \quad j = l-\frac{1}{2}. \tag{31.21}$$

Ogólne rozwiązanie przyjmuje postać

$$\psi_{Ejm}(\vec{r}) = \frac{1}{r}\left[\begin{array}{c} iG_{Ej}^{(+)}\Omega_{jm}^{(+)} + iG_{Ej}^{(-)}\Omega_{jm}^{(-)} \\ F_{Ej}^{(-)}\Omega_{jm}^{(+)} + F_{Ej}^{(+)}\Omega_{jm}^{(-)} \end{array}\right]. \tag{31.22}$$

Warto zauważyć, że spinory $\Omega_{jm}^{(+)}$ różnią się parzystością, ponieważ l różni sie o 1. Można wykazać, że

$$\Omega_{jm}^{(+)} = \vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\Omega_{jm}^{(-)}, \quad \text{gdzie} \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \tag{31.23}$$

Ponieważ potencjał $V(r)$ jest niezmienniczy ze względu na odbicia przestrzenne, rozwiązania (31.22) powinny mieć określoną parzystość. Dokonując odbicia mamy

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = -\vec{r}$$
$$\mathcal{P}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}),\ \mathcal{P}^2 = 1 \tag{31.24}$$

gdzie $\mathcal{P}$ jest (szukanym) operatorem odbicia. Po dokonaniu odbicia mamy zatem:

$$[-\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m + V(r)]\,\psi(-\vec{r}) = E\psi(-\vec{r}),$$
$$[-\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m + V(r)]\,\mathcal{P}\psi(\vec{r}) = E\mathcal{P}\psi(\vec{r}),$$
$$[-(\mathcal{P}\vec{\alpha}\mathcal{P})\cdot\vec{p} + (\mathcal{P}\beta\mathcal{P})\,m + V(r)]\,\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \tag{31.25}$$

Zatem

$$-\mathcal{P}\vec{\alpha}\mathcal{P} = \vec{\alpha},\ \mathcal{P}\beta\mathcal{P} = \beta. \tag{31.26}$$

Widać, że zdokładnością do znaku

$$\mathcal{P} = \beta. \tag{31.27}$$

Ponieważ

$$\beta = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right] \tag{31.28}$$

wdzimy, że w wyniku odbicia dolna i górna składowa spinora (31.18) zmieniają względny znak, a zatem mają różne parzystości. Ostatecznie

$$\psi_{Ejm}^{(\pm)}(\vec{r}) = \frac{1}{r}\left[\begin{array}{c} iG_{Ej}^{(\pm)}\Omega_{jm}^{(\pm)} \\ F_{Ej}^{(\pm)}\Omega_{jm}^{(\mp)} \end{array}\right]. \tag{31.29}$$

Zapiszmy teraz jawnie równanie Diraka:

$$[E - \vec{\alpha}\cdot\vec{p} - \beta m - V(r)]\,\psi(\vec{r}) = 0. \tag{31.30}$$

$$
\begin{aligned}
(E-m-V(r))\,\frac{i}{r}G^{(\pm)}_{Ej}\Omega^{(\pm)}_{jm}-(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\frac{1}{r}F^{(\pm)}_{Ej}\Omega^{(\mp)}_{jm}&=0,\\
(E+m-V(r))\,\frac{1}{r}F^{(\pm)}_{Ej}\Omega^{(\mp)}_{jm}-(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\frac{i}{r}G^{(\pm)}_{Ej}\Omega^{(\pm)}_{jm}&=0.
\end{aligned}
\tag{31.31}
$$

Widzimy zatem, że musimy znać działanie

$$
(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\frac{f(r)}{r}\Omega^{(\pm)}_{jm}=(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\frac{f(r)}{r}\Omega^{(\pm)}_{jm}
\tag{31.32}
$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że

$$
(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2=1.
\tag{31.33}
$$

ponieważ

$$
\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+i\varepsilon_{ijk}\sigma_k
\tag{31.34}
$$

mamy

$$
(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p})=\vec{n}\cdot\vec{p}+i\vec{\sigma}\,\left(\vec{n}\times\vec{p}\right)=-i\frac{\partial}{\partial r}+i\,\frac{1}{r}\vec{\sigma}\cdot\vec{L}.
\tag{31.35}
$$

A ztem

$$
\begin{aligned}
(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\frac{f(r)}{r}\Omega^{(\pm)}_{jm}&=(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\left(-i\frac{\partial}{\partial r}+i\,\frac{1}{r}\vec{\sigma}\cdot\vec{L}\right)\Omega^{(\pm)}_{jm}\\
&=-i\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{f(r)}{r}+(1\mp\kappa\,)\frac{f(r)}{r^2}\right)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\,\Omega^{(\pm)}_{jm}\\
&=-i\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1\mp\kappa}{r}\right)\frac{f(r)}{r}\Omega^{(\mp)}_{jm}
\end{aligned}
$$

Ostatecznie mamy

$$
\begin{aligned}
(E-m-V(r))\,\frac{i}{r}G^{(\pm)}_{Ej}\Omega^{(\pm)}_{jm}+i\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1\pm\kappa}{r}\right)\frac{1}{r}F^{(\pm)}_{Ej}\Omega^{(\pm)}_{jm}&=0,\\
(E+m-V(r))\,\frac{1}{r}F^{(\pm)}_{Ej}\Omega^{(\mp)}_{jm}-\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1\mp\kappa}{r}\right)\frac{1}{r}G^{(\pm)}_{Ej}\Omega^{(\mp)}_{jm}&=0,
\end{aligned}
\tag{31.36}
$$

co daje dwa równania

$$
\begin{aligned}
(E-m-V(r))\,G^{(\pm)}_{Ej}+\left(\frac{d}{dr}\pm\frac{\kappa}{r}\right)F^{(\pm)}_{Ej}&=0,\\
-\,(E+m-V(r))\,F^{(\pm)}_{Ej}+\left(\frac{d}{dr}\mp\frac{\kappa}{r}\right)G^{(\pm)}_{Ej}&=0.
\end{aligned}
\tag{31.37}
$$

Mamy ostatecznie

$$
\begin{aligned}
(E-m-V(r))\,G+\left(\frac{d}{\partial r}+\frac{\kappa}{r}\right)F&=0,\\
-\,(E+m-V(r))\,F+\left(\frac{d}{\partial r}-\frac{\kappa}{r}\right)G&=0,
\end{aligned}
\tag{31.38}
$$

gdzie $\kappa = \pm(j+1/2)$. Rozwiazania dla dodatnich κ odpowiadają $j = l + 1/2$ a dla ujemnych $j = l - 1/2$.

Równania te można rozwiązać metodą szeregów. Zdefiniujmy

$$\alpha_1 = m + E,\ \alpha_2 = m - E,\ \alpha = \sqrt{\alpha_1\alpha_2} = \sqrt{E^2 - m^2} \tag{31.39}$$

oraz nową zmienną

$$\rho = \alpha r. \tag{31.40}$$

Zauważmy, że szukamy rozwiązań o energiach E znacznie mniejszych od mc^2, więc zmienne $\alpha_{1,2}$ oraz α są rzeczywiste i dodatnie.Wówczas mamy

$$V = -\frac{Ze^2\alpha}{\rho} = -\frac{\gamma\alpha}{\rho}, \qquad \text{gdzie} \qquad \gamma = Ze^2 \tag{31.41}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho}\right) F + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha} + \frac{\gamma}{\rho}\right) G = 0, \\ \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho}\right) G - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\gamma}{\rho}\right) F = 0. \end{aligned} \tag{31.42}$$

Dla dużych ρ mamy

$$\frac{d}{d\rho}F - \frac{\alpha_2}{\alpha}G = 0, \qquad \frac{d}{d\rho}G - \frac{\alpha_1}{\alpha}F = 0 \tag{31.43}$$

co daje

$$\frac{d^2}{d\rho^2}G = G\,,\ \frac{d^2}{d\rho^2}F = F. \tag{31.44}$$

Szukamy rozwiązań postaci

$$F(\rho) = f(\rho)e^{-\rho},\ G(\rho) = g(\rho)e^{-\rho}, \tag{31.45}$$

co daje następujące równania

$$\begin{aligned} f' + \left(\frac{\kappa}{\rho} - 1\right) f - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha} - \frac{\gamma}{\rho}\right) g = 0, \\ g' - \left(\frac{\kappa}{\rho} + 1\right) g - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\gamma}{\rho}\right) f = 0. \end{aligned} \tag{31.46}$$

Popatrzmy na asymptotykę dla małych ρ:

$$\begin{aligned} f' + \frac{\kappa}{\rho}f + \frac{\gamma}{\rho}g = 0, \\ g' - \frac{\kappa}{\rho}g - \frac{\gamma}{\rho}f = 0. \end{aligned} \tag{31.47}$$

Przyjmując

$$g = a_0\rho^s,\ f = b_0\rho^t \tag{31.48}$$

mamy

$$
\begin{aligned}
(t+\kappa)b_0\rho^t + \gamma a_0\rho^s &= 0,\\
-\gamma b_0\rho^t + (s-\kappa)a_0\rho^s &= 0.
\end{aligned}
\tag{31.49}
$$

Równanie to ma niezerowe rozwiązania gdy $s = t$ i gdy wyznacznik znika

$$
s^2 - \kappa^2 + \gamma^2 = 0,
\tag{31.50}
$$

co daje

$$
s = \pm\sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}.
\tag{31.51}
$$

Wybieramy znak górny i szukamy rozwiązań w postaci szeregu

$$
f = \sum_{n=0} b_n \rho^{s+n}, \; g = \sum_{n=0} a_n \rho^{s+n}.
\tag{31.52}
$$

Podstawiając do równań (31.46) otrzymujemy związki rekurencyjne

$$
\begin{aligned}
b_n\left[(n+s+\kappa) + \gamma\frac{\alpha(n+s+\kappa)+\gamma\alpha_2}{\alpha_2(n+s-\kappa)-\gamma\alpha}\right] &= b_{n-1}\left[1+\frac{\alpha_2}{\alpha}\frac{\alpha(n-1+s+\kappa)+\gamma\alpha_2}{\alpha_2(n-1+s-\kappa)-\gamma\alpha}\right],\\
a_n\left[(n+s-\kappa) + \gamma\frac{\alpha_2(n+s-\kappa)-\gamma\alpha}{\alpha(n+s+\kappa)+\gamma\alpha_2}\right] &= a_{n-1}\left[1+\frac{\alpha_1}{\alpha}\frac{\alpha_2(n-1+s-\kappa)-\gamma\alpha}{\alpha(n-1+s+\kappa)+\gamma\alpha_2}\right].
\end{aligned}
$$

Okazuje się, że aby uniknąć rozbieżności $e^{2\rho}$ szergi musimy urwać dla $n+1$

$$
\begin{aligned}
\alpha\left[\alpha_2(n+s-\kappa)-\gamma\alpha\right] + \alpha_2\left[\alpha(n+s+\kappa)+\gamma\alpha_2\right] &= 0,\\
\alpha\left[\alpha(n+s+\kappa)+\gamma\alpha_2\right] + \alpha_1\left[\alpha_2(n+s-\kappa)-\gamma\alpha\right] &= 0,
\end{aligned}
\tag{31.53}
$$

co daje

$$
\begin{aligned}
2\alpha\alpha_2(n+s) + \gamma(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2 &= 0,\\
2\alpha^2(n+s) + \gamma\alpha(\alpha_2-\alpha_1) &= 0,
\end{aligned}
\tag{31.54}
$$

gdzie skożystaliśmy z tożsamości $\alpha_1\alpha_2 = \alpha$. Oba równania prowadzą do związku

$$
2\alpha(n+s) + \gamma(\alpha_2-\alpha_1) = 0,
\tag{31.55}
$$

co daje

$$
\sqrt{m^2 - E^2}(n+s) = E\gamma
\tag{31.56}
$$

i w rezultacie

$$
E_n = \frac{m}{\sqrt{1+\gamma^2/(\sqrt{(j+1/2)^2-\gamma^2}+n)^2}}, \quad \gamma = \frac{Ze^2}{\hbar c}
\tag{31.57}
$$

energia zależy tylko od $n = 0, 1, 2 \ldots$ i j. Zakładając, że γ jest małe rozwińmy energię w potęgi γ

$$\begin{aligned} E_n &\simeq mc^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2(\sqrt{(j+1/2)^2 - \gamma^2} + n)^2} + \ldots\right) \\ &\simeq mc^2 - \frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2((j+1/2)+n)^2} + \ldots \end{aligned} \tag{31.58}$$

Pierwszy człon odpowiada energii spoczynkowej elektronu, drugi energii wiązania, równej energii otrzymanej z równania Schrödingera. Jednakże klasyfikacja poziomów jest inna, gdyż energia zależy tu of j a nie od l (spin!).

31.3 Kowariantna postać równania Diraka

Wyprowadziliśmy

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - \beta mc^2\right)\psi = 0,$$

gdzie

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix},\ \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{31.59}$$

Mnożąc stronami przez β otrzymuemy

$$\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} - c\,\vec{\gamma}\cdot\vec{p} - mc^2\right)\psi = 0, \tag{31.60}$$

gdzie

$$\gamma^0 = \beta,\ \gamma^i = \beta\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Równanie to możemy więc zapisać w jenostkach naturalnych $c = \hbar = 1$ w formie

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\,\psi = 0, \tag{31.61}$$

gdzie

$$p^\mu = (p^0 = i\partial_t, \vec{p} = -i\vec{\nabla})$$

Warto pamiętać, że dla tensora metrycznego

$$g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) \tag{31.62}$$

mamy

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^\mu g_{\mu\nu} p^\nu = \gamma^0 p^0 - \gamma^i p^i.$$