30 Równanie Diraka

30.1 Równanie Kleina-Gordona dla cząstki swobodnej

Równanie Schrödingera jest w rzeczywistości operatorowym zapisem klasycznego związku

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{30.1}$$

gdzie pęd i energię zatępujemy operatorami

$$\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}, \; E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{30.2}$$

Najprostsze uogóleninie tej procedury na przypadek relatywistyczny, polega na użyciu (30.2) we wzorze relatywistycznym

$$E^2 = c^2\vec{p}^2 + m^2c^4, \tag{30.3}$$

co daje równanie zwane dziś równaniem Kleina-Gordona

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = \left(-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^{\,2} + m^2c^4\right)\varphi. \tag{30.4}$$

Równanie to dopuszcza rozwiązania w postaci fali płaskiej

$$\varphi = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{30.5}$$

gdzie

$$E = \hbar\omega = \pm\sqrt{\hbar^2c^2k^2 + m^2c^4} \tag{30.6}$$

Jak widać pojawiają się rozwiązania o ujemnej energii, których interpretacja nie jest jasna (antycząstki).

Wyprowadźmy teraz równanie ciągłości (poprzez analogię do równania Schrödingera). W przypadku nierelatywistycznym mieliśmy

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0 \tag{30.7}$$

gdzie

$$P = \psi^*\psi, \; \vec{S} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\,\vec{\nabla}\psi - \psi\,\vec{\nabla}\psi^*\right) \tag{30.8}$$

Odejmijmy stronami równania

$$\begin{aligned} -\hbar^2\varphi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi &= \varphi^*\left(-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^{\,2} + m^2c^4\right)\varphi \\ -\hbar^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^* &= \varphi\left(-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^{\,2} + m^2c^4\right)\varphi^* \end{aligned} \tag{30.9}$$

$$\left[\varphi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \varphi \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^*\right] = c^2 \left[\varphi^* \vec{\nabla}^2 \varphi - \varphi \vec{\nabla}^2 \varphi^*\right]. \tag{30.10}$$

Przepisując te równania jako

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi^* \frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right] = c^2 \vec{\nabla}\left[\varphi^* \vec{\nabla}\varphi - \varphi \vec{\nabla}\varphi^*\right] \tag{30.11}$$

widzimy, że gęstość prądu jest identuczna jak w przypadku nierelatywisycznym

$$\vec{S} = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\varphi^* \vec{\nabla}\varphi - \varphi \vec{\nabla}\varphi^*\right] \tag{30.12}$$

natomiast odpowiednik gęstości prawdopodobieństwa jest wówczas dany jako

$$P = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left[\varphi^* \frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right]. \tag{30.13}$$

Tak zdefiniowane P nie jest dodatnio określone, nie można go więc zinterpretować jako gęstości prawdopodobieństwa (po pomnożeniu przez e możnaby jako gęstość ładunku). Jest to zwiazane z tym, że równanie (30.4) jest drugieo rzędu w pochodnych po czasie.

30.2 Równanie Diraka dla cząstki swobodnej

Dirac zaproponował użycie związku liniowego, kosztem wprowadzenia niekomutuących, bezwymiarowych obiektów $\vec{\alpha}$ i β (macierze):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\psi. \tag{30.14}$$

Podnosząc (opweratorowo) równanie (30.14) do kwadratu powiniśmy dostać równanie (30.4):

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\psi. \tag{30.15}$$

Rozpiszmy prawą stronę

$$\begin{aligned} & c^2\alpha_i\alpha_j p_i p_j + mc^3\left(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j\right) + m^2c^4\beta^2 \\ &= c^2\frac{1}{2}\left(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i\right)p_i p_j + mc^3\left(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j\right) + m^2c^4\beta^2. \end{aligned} \tag{30.16}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że operator $p_i p_j$ jest symetryczny w indeksach ij. Porównując z (30.4) lub z (30.3) mamy

$$\begin{aligned} (\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) &= 2\delta_{ij}, \\ (\alpha_i\beta + \beta\alpha_j) &= 0, \\ \beta^2 &= 1. \end{aligned} \tag{30.17}$$

Znalezienie rozwiązań równań (30.17) dyskutowane jest w literaturze, tu podamy jedynie ostateczne rozwiązanie. Okazuje się, że najniższy możliwy wymiar macierzy α_i i β jest 4 i mają one postać

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \ \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{30.18}$$

gdzie σ_i są macierazmi Pauliego:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{30.19}$$

Sprawdźmy

$$\begin{aligned}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{30.20}$$

Pamiętając, że

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{30.21}$$

dostajemy pierwszą z równości (30.17). Z kolei

$$\begin{aligned}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j) &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} = 0.\end{aligned} \tag{30.22}$$

Wreszcie

$$\beta^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1. \tag{30.23}$$

Oczywiście wybór (30.18) nie jest jednoznaczny. Macierze unitarne równoważne

$$\alpha_i' = U^\dagger\alpha_i U, \ \beta' = U^\dagger\beta U \tag{30.24}$$

także spełniają związki (30.17). Reprezentację macierzy α_i i β daną wzorami (30.18) nazywamy reprezentacją Bjorkena.

Mamy zatem równanie liniowe w pochodnej czasowej, ale funkcja falowa jest czterowyniarowym spinorem. Rozwiązanie swobodnego równania Diraka zapisujemy w postaci fali płaskiej

$$\psi(t, \vec{r}) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}u \tag{30.25}$$

gdzie u jest czterowymiarowym (wektorem) spinorem

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \tag{30.26}$$

Po podstawieni fali płaskiej mamy równanie na u (kładąc $c = 1$)

$$\begin{bmatrix} E-m & 0 & -p_z & -(p_x - ip_y) \\ 0 & E-m & -(p_x + ip_y) & p_z \\ -p_z & -(p_x - ip_y) & E+m & 0 \\ -(p_x + ip_y) & p_z & 0 & E+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = 0. \tag{30.27}$$

Warunkiem istnienia rozwiązań jest znikanie wyznacznika, który jest równy

$$\left(E^2 - \vec{p}^2 - m^2\right)^2 = 0. \tag{30.28}$$

Czyli mamy

$$E_\pm = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \tag{30.29}$$

Dla dodatniego pierwiastka istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania, które przyjmuje się w postaci

$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_+ + m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E_+ + m} \end{bmatrix}, \; u^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E_+ + m} \\ -\frac{p_z}{E_+ + m} \end{bmatrix}. \tag{30.30}$$

Dla ujemnej energii mamy

$$u^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{p_z}{E_- - m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E_- - m} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E_- - m} \\ -\frac{p_z}{E_- - m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{30.31}$$

Sprawdźmy pierwsze rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} E-m & 0 & -p_z & -(p_x - ip_y) \\ 0 & E-m & -(p_x + ip_y) & p_z \\ -p_z & -(p_x - ip_y) & E+m & 0 \\ -(p_x + ip_y) & p_z & 0 & E+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_+ + m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E_+ + m} \end{bmatrix}.$$

Po kolei:

$$\begin{aligned} E_+ - m - \frac{-p_z^2 - p_x^2 - p_z^2}{E_+ + m} &= \frac{1}{E_+ + m}(E_+^2 - m^2 - \vec{p}^2) = 0 \\ -\frac{p_z}{E_+ + m}(p_x + ip_y) + p_z\frac{p_x + ip_y}{E_+ + m} &= 0, \\ -p_z + (E_+ + m)\,\frac{p_z}{E_+ + m} &= 0, \\ -(p_x + ip_y) + (E_+ + m)\,\frac{p_x + ip_y}{E_+ + m} &= 0. \end{aligned}$$

Dla pozostałych rozwiązań rachunki przebiegają podobnie. Pouczające jest sparwdzić warunek ortogonalności między rozwiązaniami o dodatniej i ujemnej energii. Na przykład

$$u^{(3)\dagger}u^{(1)} = \left[\frac{p_z}{E_- - m} \quad \frac{p_x - ip_y}{E_- - m} \quad 1 \quad 0\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E_+ + m} \\ -\frac{p_z}{E_+ + m} \end{array}\right]$$

$$= \frac{p_x - ip_y}{E_- - m} + \frac{p_x - ip_y}{E_+ + m} = 0. \tag{30.32}$$

Otrzymaliśmy zero gdyż $E_- = -E_+$.

Rozwiazania (30.30) i (30.31) można unormować

$$u^{(i)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \vec{p}^2/(E_+ + m)^2}}. \tag{30.33}$$

Łatwo przekonać się, że równanie ciągłośvi jest spełnione i że mamy

$$P = \psi^\dagger\psi,\ \vec{S} = c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi. \tag{30.34}$$

Aby do końca zrozumieć znaczenie fizyczne rozwiązań (30.30) i (30.31) zdefinujmy operator spinu

$$\vec{\Sigma} = \frac{\hbar}{2}\left[\begin{array}{cc} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{array}\right]. \tag{30.35}$$

Działając tym operatorem na rozwiąznia "w spoczynku": $\vec{p} = 0$ otrzymujemy, że $u^{(1,3)}$ odpowiadają rozwiązaniom o $s_3 = +\hbar/2$ a rozwiązania $u^{(2,4)}$ mają $s_3 = -\hbar/2$. Pojawienie się spinu jest konsekwencją niezmienniczości relatywistycznej.

Antycząstki, teoria dziur.