

## 20 Współczynniki Clebscha-Gordana

### 20.1 Definicja

Rozważmy układ składający się z dwóch podsystemów zależnych od różnych zmiennych. Najprościej wyobrazić sobie taki system jako układ dwóch elektronów, poruszających się w potencjale sferycznie symetrycznym, których wzajemne oddziaływanie zaniedbujemy. Wówczas funkcja falowa każdego z elektronów daje się rozseparować na części radialną i kątową, przy czym części kątowe zależą odpowiednio od kątów  $\theta_1, \varphi_1$  i  $\theta_2, \varphi_2$ . Jest oczywiste, że operatory orbitalnego momentu pędu dla pierwszego elektronu  $\hat{L}_k^{(1)}$  i dla drugiego  $\hat{L}_k^{(2)}$  komutują

$$\left[ \hat{L}_k^{(1)}, \hat{L}_m^{(2)} \right] = 0,$$

gdyż są to operatory różniczkowe działające na różne zmienne. Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie: jak wyglądają stany własne operatora sumarycznego momentu pędu  $\hat{L}_k = \hat{L}_k^{(1)} + \hat{L}_k^{(2)}$ . Jak się okaże, nasze rozważania będą całkowicie ogólne i pozostaną słuszne także dla krętów ułamkowych. Rozpatrzmy zatem dwa operatory  $\hat{J}_k^{(1,2)}$  działające w 2 różnych przestrzeniach

$$\begin{aligned} \hat{J}^{(1)2} |j_1, m_1\rangle &= j_1(j_1 + 1) |j_1, m_1\rangle, & \hat{J}^{(2)2} |j_2, m_2\rangle &= j_2(j_2 + 1) |j_2, m_2\rangle, \\ \hat{J}_3^{(1)} |j_1, m_1\rangle &= m_1 |j_1, m_1\rangle, & \hat{J}_3^{(2)} |j_2, m_2\rangle &= m_2 |j_2, m_2\rangle, \end{aligned} \quad (20.1)$$

gdzie dla ułatwienia przyjęliśmy układ jednostek, w których  $\hbar = 1$ , lub – jak kto woli – przeskalowaliśmy operatory  $\hat{J}_k \rightarrow \hat{J}_k/\hbar$ . Stąd relacje komutacji przyjmują postać

$$\left[ \hat{J}_k^{(1,2)}, \hat{J}_m^{(1,2)} \right] = i\epsilon_{kmn} \hat{J}_n^{(1,2)}, \quad \left[ \hat{J}_k^{(1)}, \hat{J}_m^{(2)} \right] = 0. \quad (20.2)$$

Operator całkowitego momentu pędu jest sumą

$$\hat{J}_k = \hat{J}_k^{(1)} \circ 1^{(2)} + 1^{(1)} \circ \hat{J}_k^{(2)}, \quad (20.3)$$

gdzie przez  $1^{(1,2)}$  oznaczyliśmy operator jednostkowy działający odpowiednio w pierwszej lub drugiej przestrzeni. Poniżej będziemy opuszczać operatory jednostkowe, gdyż upraszcza to znacznie notację. Naszym zadaniem będzie skonstruowanie stanów własnych  $|j, m\rangle$  operatora  $\hat{J}^2$  i  $\hat{J}_3$  ze stanów  $|j_1, m_1\rangle$  i  $|j_2, m_2\rangle$ . Z postaci operatora (20.3) widać, że stanami własnymi operatora  $\hat{J}_3$  będą stany *iloczynowe*  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ . Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \hat{J}_3 |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= \hat{J}_3^{(1)} |j_1, m_1\rangle \circ 1^{(2)} |j_2, m_2\rangle + 1^{(1)} |j_1, m_1\rangle \circ \hat{J}_3^{(2)} |j_2, m_2\rangle \\ &= (m_1 + m_2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Powstaje pytanie: czy stany te są stanami własnymi  $\hat{J}^2$ ? Okazuje się że nie. Aby to

wykazać zapiszmy  $\hat{J}^2$  jako

$$\begin{aligned}
\hat{J}^2 &= \frac{1}{2} \hat{J}_+ \hat{J}_- + \frac{1}{2} \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_3^2 \\
&= \frac{1}{2} \left( J_+^{(1)} + J_+^{(2)} \right) \left( J_-^{(1)} + J_-^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \left( J_-^{(1)} + J_-^{(2)} \right) \left( J_+^{(1)} + J_+^{(2)} \right) + \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left( J_+^{(1)} J_-^{(1)} + J_-^{(1)} J_+^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left( J_+^{(2)} J_-^{(2)} + J_-^{(2)} J_+^{(2)} \right) \\
&\quad + J_+^{(1)} J_-^{(2)} + J_-^{(1)} J_+^{(2)} + \left( J_3^{(1)} + J_3^{(2)} \right)^2, \tag{20.5}
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że  $J_k^{(1)}$  i  $J_m^{(2)}$  komutują. Wyliczmy teraz działanie poszczególnych składników sumy (??) na stan iloczynowy  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ :

$$\begin{aligned}
\left( \hat{J}_+^{(1)} \hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(1)} \hat{J}_+^{(1)} \right) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= (j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 - 1)) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \\
&\quad + (j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 + 1)) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \\
&= 2(j_1(j_1 + 1) - m_1^2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \tag{20.6}
\end{aligned}$$

i analogicznie

$$\left( \hat{J}_+^{(2)} \hat{J}_-^{(2)} + \hat{J}_-^{(2)} \hat{J}_+^{(2)} \right) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = 2(j_2(j_2 + 1) - m_2^2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle. \tag{20.7}$$

Z kolei

$$\begin{aligned}
&\hat{J}_+^{(1)} \hat{J}_-^{(2)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \\
&= \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 + 1)} \sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 - 1)} |j_1, m_1 + 1\rangle |j_2, m_2 - 1\rangle, \tag{20.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{J}_-^{(1)} \hat{J}_+^{(2)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \\
&= \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 - 1)} \sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 + 1)} |j_1, m_1 - 1\rangle |j_2, m_2 + 1\rangle \tag{20.9}
\end{aligned}$$

i wreszcie

$$\left( \hat{J}_3^{(1)} + \hat{J}_3^{(2)} \right)^2 |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = (m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle. \tag{20.10}$$

Zatem w sumie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\hat{J}^2 |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \tag{20.11} \\
&= (j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1) + 2m_1m_2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \\
&\quad + \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 + 1)} \sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 - 1)} |j_1, m_1 + 1\rangle |j_2, m_2 - 1\rangle \\
&\quad + \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 - 1)} \sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 + 1)} |j_1, m_1 - 1\rangle |j_2, m_2 + 1\rangle.
\end{aligned}$$

Widzimy zatem, że w ogólności w wyniku działania operatora  $\hat{J}^2$  na stan iloczynowy  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$  dostajemy nowe stany, mianowicie  $|j_1, m_1 + 1\rangle |j_2, m_2 - 1\rangle$  i  $|j_1, m_1 - 1\rangle$

$|j_2, m_2 + 1\rangle$ . Warto zauważyć, że wszystkie te stany odpowiadają tej samej wartości własnej  $\hat{J}_3$ :  $m_1 + m_2$ , czego należało oczekiwać, gdyż  $\hat{J}_3$  komutuje z  $\hat{J}^2$ .

Z równania (20.11) wynika, że stany diagonalizujące  $\hat{J}^2$  będą w ogólności kombinacjami liniowymi stanów iloczynowych  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ :

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m}, \quad (20.12)$$

gdzie suma przebiega po  $m_1$  i  $m_2$  z warunkiem, że  $m_1 + m_2 = m$ . Współczynniki liczbowe  $C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m}$  mnożące stany  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$  w tych kombinacjach liniowych noszą nazwę *współczynników Clebscha-Gordana*. Dla współczynników tych przyjęto stosować nieco inną notację

$$C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m} = \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right). \quad (20.13)$$

Wówczas wzór (20.12) przyjmuje postać:

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right), \quad (20.14)$$

Zauważmy, że stany (20.12) czy (20.14) są także stanami własnymi  $J^{(1,2)^2}$  i czasami są oznaczane jako

$$|j_1, j_2; j, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right). \quad (20.15)$$

W dalszej części dla uproszczenia będziemy używać (20.12), (20.14).

## 20.2 Konstrukcja

Aby wyliczyć  $C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m}$  zastosujemy systematyczną procedurę jawnej konstrukcji stanów własnych operatora  $\hat{J}^2$ . Zauważmy najpierw, że istnieją dwa stany iloczynowe, które są stanami własnymi  $\hat{J}^2$ , mianowicie stany o najwyższych i najniższych możliwych rzutach krętu  $m_{1,2} = \pm j_{1,2}$ . Rzeczywiście dla tych dwu wartości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 |j_1, \pm j_1\rangle |j_2, \pm j_2\rangle &= (j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1) + 2j_1 j_2) |j_1, \pm j_1\rangle |j_2, \pm j_2\rangle \\ &= (j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1) |j_1, \pm j_1\rangle |j_2, \pm j_2\rangle. \end{aligned} \quad (20.16)$$

Widzimy zatem, że te dwa stany są stanami własnymi operatora  $\hat{J}^2$  do wartości własnej  $j = j_1 + j_2$  oraz operatora  $\hat{J}_3$  do wartości własnej  $m = \pm(j_1 + j_2)$ . Pozostaje zatem jedynie ustalić współczynnik proporcjonalności pomiędzy stanem  $|j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle$  a stanem  $|j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle$ . Ze względu na warunek unormowania współczynnik ten może przyjmować jedynie postać fazy  $e^{i\varphi}$ . Tradycyjnie fazę tę przyjmuje się jako zero, czyli

$$|j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle. \quad (20.17)$$

Warunek ten tłumaczy się na wartość pierwszego współczynnika Clebscha-Gordana

$$\left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j = j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 & m = j_1 + j_2 \end{array} \right) = 1. \quad (20.18)$$

Współczynnik proporcjonalności dla stanu o  $m = -j_1 - j_2$  wyjdzie nam w sposób naturalny z konstrukcji stanów własnych operatora  $\hat{J}^2$ . Wzór (20.17) jest pierwszą z tzw. konwencji Condon-Shortleya.

Mając stan  $|j, j\rangle$  możemy skonstruować wszystkie stany własne operatora  $\hat{J}^2$  do wartości własnej  $j = j_1 + j_2$  poprzez wielokrotne działanie operatorem  $\hat{J}_-$ . Działając jednokrotnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |j, j\rangle &= \sqrt{2j} |j, j-1\rangle, \\ (\hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)}) |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle &= \sqrt{2j_1} |j_1, j_1-1\rangle |j_2, j_2\rangle + \sqrt{2j_2} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2-1\rangle, \end{aligned} \quad (20.19)$$

gdzie  $j = j_1 + j_2$ . Ponieważ oba stany we wzorze (20.19) są sobie równe, otrzymujemy, że

$$|j, j-1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j}} |j_1, j_1-1\rangle |j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j}} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2-1\rangle. \quad (20.20)$$

Łatwo się upewnić, że tak zdefiniowany stan  $|j, j-1\rangle$  jest poprawnie unormowany. Wzór (20.20) tłumaczy się na wartości owiednich współczynników Clebscha-Gordana:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 - 1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right) &= \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}, \\ \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 - 1 & j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right) &= \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}. \end{aligned} \quad (20.21)$$

Mając do dyspozycji dwa stany o całkowitym  $m = j_1 + j_2 - 1$ :

$$|j_1, j_1-1\rangle |j_2, j_2\rangle, \quad |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2-1\rangle \quad (20.22)$$

możemy skonstruować drugą kombinację liniową, która będzie ortogonalna do (20.20). Kombinacja ta będzie stanem własnym operatora  $\hat{J}_3$  do tej samej wartości własnej  $m = j-1$ . Ponieważ stany  $|j, m\rangle$  nie są zdegenerowane, musi ona odpowiadać stanowi o innym  $j$ . Jedynym możliwym stanem jest tu stan  $|j-1, j-1\rangle$ . A zatem

$$|j-1, j-1\rangle = \alpha |j_1, j_1-1\rangle |j_2, j_2\rangle + \beta |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2-1\rangle, \quad (20.23)$$

gdzie *rzeczywiste* (to kolejna konwencja) współczynniki  $\alpha$  i  $\beta$  wyliczymy z warunku ortogonalności

$$\langle j-1, j-1 | j, j-1\rangle = \alpha \sqrt{\frac{j_1}{j}} + \beta \sqrt{\frac{j_2}{j}} = 0 \quad (20.24)$$

i unormowania

$$\langle j-1, j-1 | j-1, j-1 \rangle = \alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (20.25)$$

Jak łatwo się przekonać rozwiązanie równań (20.24) i (20.25) nie jest jednoznaczne

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{j_2}{j}}, \quad \beta = \mp \sqrt{\frac{j_1}{j}}. \quad (20.26)$$

Musimy zatem przyjąć kolejną konwencję, która jednoznacznie określi wybór znaku w równaniu (20.26). Aby tę konwencję wygodnie wypowiedzieć, zauważmy że

$$\alpha = \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ j_1 - 1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right), \quad \beta = \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ j_1 & j_2 - 1 & j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right). \quad (20.27)$$

Przyjmijmy, że współczynnik  $\beta > 0$ , co ogólnie możemy zapisać jako

$$\left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - n \\ j_1 & j_2 - n & j_1 + j_2 - n \end{array} \right) > 0, \quad (20.28)$$

gdzie  $0 \leq n \leq 2j_2$ . Konwencja ta pozwala nam wyznaczyć już jednoznacznie wszystkie współczynniki Clebscha-Gordana. Stąd mamy

$$|j-1, j-1\rangle = -\sqrt{\frac{j_1}{j}} |j_1, j_1-1\rangle |j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j}} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2-1\rangle, \quad (20.29)$$

czyli

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 - 1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right) &= -\sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}, \\ \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 - 1 & j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right) &= \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}. \end{aligned} \quad (20.30)$$

Dalsza procedura jest już oczywista: działamy na stany (20.20) i (20.29) operatorem  $\hat{J}_-$  i dostajemy dwie kombinacje liniowe stanów

$$|j_1, j_1-2\rangle |j_2, j_2\rangle, \quad |j_1, j_1-1\rangle |j_2, j_2-1\rangle, \quad |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2-2\rangle \quad (20.31)$$

odpowiadające stanom

$$|j, j-2\rangle, \quad |j-1, j-2\rangle,$$

gdzie  $j = j_1 + j_2$ . Korzystając z warunku ortogonalności, unormowania i konwencji (20.28) konstruujemy trzecią kombinację liniową odpowiadającą stanowi

$$|j-2, j-2\rangle.$$

Zauważmy, że w zerowym kroku dysponowaliśmy jednym stanem iloczynowym  $|j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle$ , w pierwszym dwoma stanami (20.22), a w drugim trzema stanami (20.31). W  $n$ -tym kroku powinniśmy mieć do dyspozycji  $n + 1$  stanów:

$$\begin{aligned}
& |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle \\
& |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle, \quad |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle \\
& |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 2\rangle, \quad |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle, \quad |j_1, j_1 - 2\rangle |j_2, j_2\rangle \\
& \dots \\
& |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - n\rangle, \quad |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2 - n + 1\rangle, \quad \dots \quad |j_1, j_1 - n\rangle |j_2, j_2\rangle
\end{aligned} \tag{20.32}$$

i tak dalej. Jeżeli jednak  $n = 2j_1$  lub  $n = 2j_2$  to wówczas w następnym ( $n + 1$ -wszym) kroku nie pojawia się jeden (lub dwa jeśli  $j_1 = j_2$ ) z dwu skrajnych stanów we wzorze (20.32), co oznacza, że liczba stanów jest taka sama (lub o jeden mniejsza) jak w kroku poprzednim. A to z kolei oznacza, że nie musimy konstruować nowej kombinacji liniowej, która odpowiadałaby stanowi  $|j - n - 1, j - n - 1\rangle$ . Od tego momentu przestaje pojawiać się konieczność konstruowania stanów o nowym  $j$ . Czyli, że minimalne  $j_{\min} = j_1 - j_2$  gdy  $j_1 > j_2$ , lub  $j_{\min} = j_2 - j_1$ , gdy  $j_2 > j_1$ . Od tej pory liczba stanów otrzymywana w kolejnych krokach będzie się zmniejszać, aż osiągniemy ostatni, pojedynczy stan iloczynowy  $|j_1, -j_1\rangle |j_2, -j_2\rangle$ .

Podsumujmy: w wyniku opisanej konstrukcji otrzymamy kombinacje liniowe stanów iloczynowych odpowiadające stanom własnym całkowitego momentu pędu o  $j$  zawartym między

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \tag{20.33}$$

Liczba wszystkich stanów iloczynowych wynosi

$$(2j_1 + 1)(2j_2 + 1), \tag{20.34}$$

natomiast liczba stanów własnych operatora całkowitego krętu  $\hat{J}^2$  i  $\hat{J}_3$  wynosi

$$N = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j + 1). \tag{20.35}$$

Załóżmy, że  $j_1 > j_2$  i obliczmy  $N$  ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego:

$$N = 2 \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} j + \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} 1 = [(j_1 + j_2) + (j_1 - j_2)] [2j_2 + 1] + (2j_2 + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1). \tag{20.36}$$

Liczba stanów iloczynowych i liczba stanów własnych operatora całkowitego krętu  $\hat{J}^2$  i  $\hat{J}_3$  są sobie równe. W dodatku oba zbiory stanów są ortonormalne, stąd transformacja (20.14) dla  $j$  przedziału (20.33) jest faktycznie *ortonormalną transformacją* bazy iloczynowej do bazy stanów własnych operatora całkowitego krętu  $\hat{J}^2$  i  $\hat{J}_3$ .

### 20.3 Własności ortogonalności

Z opisanej wyżej konstrukcji wynika, że współczynniki Clebscha-Gordana są rzeczywiste i sprzężenie hermitowskie stanu

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} \quad (20.37)$$

przyjmuje postać

$$\langle j', m' | = \sum_{m'_1, m'_2} \langle j'_1, m'_1 | \langle j'_2, m'_2 | \begin{pmatrix} j'_1 & j'_2 & | & j' \\ m'_1 & m'_2 & | & m' \end{pmatrix}, \quad (20.38)$$

gdzie dla późniejszej wygody zamieniliśmy  $j$ -ty i  $m$ -y na wielkości primowane. Korzystając z warunku ortogonalności stanów

$$\langle j', m' | j, m\rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (20.39)$$

otrzymujemy

$$\sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j' \\ m_1 & m_2 & | & m' \end{pmatrix} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (20.40)$$

Związek ten pozwala nam na zapisanie relacji odwrotnej do (20.14)

$$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = \sum_{j, m} |j, m\rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix}, \quad (20.41)$$

przy czym sumowanie po  $j$  przebiega w granicach (20.33), a sumowanie po  $m$  ogranicza się do  $m = m_1 + m_2$ .

Z warunku unormowania stanu (20.41) otrzymujemy drugą relację ortogonalności:

$$\sum_{j, m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m'_1 & m'_2 & | & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j' \\ m_1 & m_2 & | & m' \end{pmatrix} = \delta_{m'_1 m_1} \delta_{m'_2 m_2}. \quad (20.42)$$

### 20.4 Związki rekurencyjne

Działając operatorem  $\hat{J}_+$  na równanie (20.37) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \\ &= \sum_{m_1, m_2} \left[ \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} |j_1, m_1+1\rangle |j_2, m_2\rangle \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2+1\rangle \right] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} \\ &= \sum_{m_1, m_2} \left[ \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1-1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2-1 & | & m \end{pmatrix} \right] \quad (20.43) \end{aligned}$$

Zastosujmy teraz wzór (20.37) ale dla stanu  $|j, m+1\rangle$  i porównajmy współczynniki przy stanach  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ :

$$\begin{aligned} & \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m+1 \end{array} \right) \\ &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1-1 & m_2 & m \end{array} \right) \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2-1 & m \end{array} \right). \end{aligned} \quad (20.44)$$

Postępując w analogiczny sposób dla operatora  $\hat{J}_-$  otrzymamy drugi związek rekurencyjny

$$\begin{aligned} & \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m-1 \end{array} \right) \\ &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1+1 & m_2 & m \end{array} \right) \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2+1 & m \end{array} \right). \end{aligned} \quad (20.45)$$

## 20.5 Jawsna postać współczynników Clebscha-Gordana

Współczynniki Clebscha-Gordana są stabelaryzowane i w tej formie można je znaleźć w literaturze. Na przykład dla  $j_1 = j_2 = 1$  tabela taka przyjmuje postać

$j_1 = 1$	$j_2 = 1$	2	2	1	2	1	0	2	1	2	$j$
$m_1$	$m_2$	2	1	1	0	0	0	-1	-1	-2	$m$
1	1	1									
1	0		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
0	1		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$							
1	-1				$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$				
0	0				$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$				
-1	1				$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$				
0	-1							$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
-1	0							$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		
-1	-1									1	

gdzie wartości stojące w tabeli należy wziąć z pierwiastkiem, a ewentualny znak  $-$  postawić przed pierwiastkiem. Nie wypełnione miejsca to zera. Na przykład stan  $|1, 1\rangle$  daje się rozisać jako

$$|1, 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} |1, 1\rangle |1, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |1, 0\rangle |1, 1\rangle. \quad (20.47)$$

Warto na koniec zaznaczyć, że w literaturze spotyka się tzw. współczynniki  $2j$  i  $3j$ .



20. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND  $d$  FUNCTIONS

Note: A  $\sqrt{\quad}$  is to be understood over every coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

Notation:

$J$	$J$	...
$M$	$M$	...
$m_1$	$m_2$	
$m_1$	$m_2$	Coefficients
.	.	
.	.	

$Y_0^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$   
 $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$   
 $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$   
 $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$   
 $Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^m$

$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M)$   
 $= (-1)^{J-j_1-j_2} (j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M)$

$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,-m'}^j = d_{-m,-m'}^j$   
 $d_{m,0}^j = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

$d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$   
 $d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$   
 $d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$   
 $d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$   
 $d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$   
 $d_{0,0}^1 = \cos \theta$

$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$   
 $d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$   
 $d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$   
 $d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$   
 $d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta + 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$   
 $d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{2,2}^2 = \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2$   
 $d_{2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$   
 $d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$   
 $d_{2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$   
 $d_{2,-2}^2 = \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2$

$d_{1,1}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$   
 $d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$   
 $d_{1,-1}^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$

$d_{0,0}^2 = \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

Rysunek 1: