17 Naturalne jednostki w fizyce atomowej

W systemie CGS wszystkie wielkości fizyczne wyrażane są jako potęgi trzech fundamentalnych jednostek:

1. długości (l) cm,
2. masy (m) g,
3. czasu (t) s.

Wymiary innych wielkości, z którymi mamy do czynienia w mechanice wyprowadza się z równań. Przykładowo z równań

$$p = mv,\ E = \frac{1}{2}mv^2,\ F = \frac{dp}{dt},\ \frac{dF_x}{dA} = \eta\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

wynika

$$\begin{aligned}
[\text{pęd}] &= m \cdot l \cdot t^{-1}, \\
[\text{energia}] &= m \cdot l^2 \cdot t^{-2}, \\
[\text{siła}] &= m \cdot l \cdot t^{-2}, \\
[\text{lepkość}] &= m \cdot l \cdot t^{-2} \times l^{-2} \times \left(l \cdot t^{-1} \cdot l^{-1}\right)^{-1} = m \cdot l^{-1} \cdot t^{-1}.
\end{aligned} \tag{17.1}$$

Inne jednostki: funt, cal, ar są pochodnymi tych podstawowych.

W elektrodynamice pojawia się *ładunek*. Nowa jakość wymaga nowej jednostki, np. *Coulomb* czy *Faraday*. Dziś wiemy, że ładunek odpowiada pewnej liczbie elektronów, np:

$$1\,\mathrm{C} = 6,24150636 \times 10^{18}\,\text{elektronów}. \tag{17.2}$$

Niezależna jednostka nie jest potrzebna, można użyć jednostek podstawowych, korzystając z prawa Coulomba (nie da się tego jednak zrobić dla grawitacji):

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

skąd dostajemy

$$[\text{ładunek}] = [\text{siła}]^{1/2} \cdot l = m^{1/2} \cdot l^{3/2} \cdot t^{-1}. \tag{17.3}$$

Zatem podstawowa jednostka ładunku w systemie CGS to

$$[\text{ładunek}] = \frac{\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{3/2}}{\mathrm{s}}.$$

Jest tak, bo napisaliśmy prawo Coulomba bez stałej proporcjonalności. Gdy $e_1 = e_2 = 1$ i $r = 1$ cm, wtedy siła $F = 1$ dyna. Taki ładunek nazywamy skrótowo esu lub stat Coulomb. Wynosi on około $2,0819424 \times 10^9$ elektrona.

W układzie MKS (SI) jest inaczej. Nowe jednostki *ad hoc* wprowadza się dowolnie dodając stałe proporcjonalności do wzorów. W MKS 1 Coulomb jest w gruncie rzeczy równoważny pewnej liczbie elektronów (ilu). Definicja: jest to ładunek przenoszony przez prąd o natężeniu jednego ampera w czasie 1 sekundy. Prawo Coulomba

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \tag{17.4}$$

Argument, który pozwala w CGS zdefiniować ładunek, można rozciągnąć na wszystkie wielkości elektrodynamiczne:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\,\vec{v} \times \vec{B} \tag{17.5}$$

ale też

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\,\frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B} \tag{17.6}$$

wersja jednostek Gaussa. Stąd pole magnetyczne

$$[\text{pole magnetyczne}] = \frac{[\text{siła}]}{[\text{ładunek}]} = \frac{[\text{siła}]}{[\text{siła}]^{1/2} \cdot l} = m^{1/2} \cdot l^{-1/2} \cdot t^{-1}. \tag{17.7}$$

Kiedy jednak opuszczamy świat ludzkich rozmiarów, układ CGS przestaje być naturalny. Świadczą o tym duże potęgi 1/10 w stałych $\hbar$ czy c wyrażonych w CGS.

$$\begin{aligned} \hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1,05457266(63) \times 10^{-27}\,\mathrm{g\ cm^2\ s^{-1}}, \\ c &= 2,99792458 \times 10^{10}\,\mathrm{cm\ s^{-1}}, \\ E &= \mathrm{eV} = 1,60217733(49) \times 10^{-12}\,\mathrm{g\ cm^2\ s^{-2}}. \end{aligned}$$

System jednostek, w którym każda wielkość może być wyrażona przez $\hbar$, c jest powszechnie używany w fizyce atomowej, jądrowej, astrofizyce, fizyce wysokich energii. Jest to Naturalny Układ Jednostek.

m, l oraz t są niezależne, można jednak użyć innych niezależnych jednostek:

$$\begin{aligned} [\text{działanie}] &= m \cdot l^2 \cdot t^{-1}, \\ [\text{prędkość}] &= l \cdot t^{-1}, \\ [\text{energia}] &= m \cdot l^2 \cdot t^{-2}. \end{aligned} \tag{17.8}$$

Każda wielkość D w CGS może być przeliczona na te jednostki

$$[D] = m^a l^b t^c = E^\alpha \hbar^\beta c^\gamma = m^{\alpha+\beta} \cdot l^{2(\alpha+\beta)+\gamma} \cdot t^{-2\alpha-\beta-\gamma}, \tag{17.9}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha &= a - b - c, \\ \beta &= b + c, \\ \gamma &= b - 2a. \end{aligned} \tag{17.10}$$

W tych jednostkach mamy

$$\begin{aligned}
[\text{masa}] &= \text{eV}\cdot c^{-2},\\
[\text{czas}] &= \text{eV}^{-1}\cdot \hbar,\\
[\text{długość}] &= \text{eV}^{-1}\cdot \hbar \cdot c,\\
[\text{pęd}] &= \text{eV}\cdot c^{-1},\\
[\text{siła}] &= \text{eV}^{2}\cdot \hbar^{-1}\cdot c^{-1},\\
[\text{ciśnienie}] &= \text{eV}^{4}\cdot \hbar^{-3}\cdot c^{-3},\\
[\text{ładunek}^2] &= \hbar\cdot c,\\
[\text{pole magnetyczne}] &= \text{eV}^{2}\cdot \hbar^{-3/2}\cdot c^{-3/2}.
\end{aligned}$$

Powody, dla których ten układ jednostek jest dobry:

- Prostota. Można opuścić $\hbar$ i c. To można było zrobić w CGS, elminując np. cm i sekundę wyrażając wszystkie wielkości w gramach. Nie robi się tego, bo nie ma po temu żadnej fundamentalnej przyczyny i dlatego, bo lubimy różne jednostki dla różnych wielkości. W przypadku jednostek naturalnych $\hbar$ i c *są wyróżnione* i stanowią naturalne jednostki działania i prędkości dla zjawisk atomowych. Druga niedogodność jest zrównoważona przez wygodę. Czynniki konwersji:

$$\begin{aligned}
\hbar c &= 197,327053(59)\,\text{MeV fm},\\
\hbar &= 6,5821220(20)\times 10^{-22}\,\text{MeV s},
\end{aligned} \qquad (17.11)$$

  (1 MeV = 10^6eV, 1 fm = 10^{-13}cm).

- Naturalność. Stała Plancka i prędkość światła wyznaczają skalę zjawisk kwantowych. Przykłady

  1. Energia odpowiadająca masie elektronu to 511 keV, więc w jednostkach naturalnych

  $$m_e = 511\,\text{keV}. \qquad (17.12)$$

  Jakiej odległości to odpowiada:

  $$l_e = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{\hbar c}{m_e c^2} = \frac{197}{511}\frac{\text{MeV fm}}{\text{keV}} = 385\,\text{fm} = 3,85\times 10^{-11}\text{cm}.$$

  To jest długość fali Comptona elektronu.
  Jaki to czas?

  $$t_e = \frac{l_e}{c} = 1,28\times 10^{-21}\,\text{s}. \qquad (17.13)$$

  To jest czas, jaki potrzba, żeby światło przeleciało długość fali Comptona elektronu.

Jaka to częstość?

$$\nu_e = \frac{1}{t_e} = 7,8 \times 10^{20}\,\mathrm{Hz} \tag{17.14}$$

co stanowi częstość każdego z dwóch fotonów (promieni światła) wyemitowanych w wyniku anihilacj elektron-pozyton.

Morał: wszystkie interesujące skale kwantowe i relatywistyczne związane z elektronem są naturalne w Naturalnym Układzie Jednostek.

2. Elektron o energii 10 eV rozprasza się na atomie pod kątem $0,2$ radiana. Jaką odległość wgłąb atomu penetruje taki elektron?

   Najpierw policzmy jego pęd

   $$p = \sqrt{2mE} = (2 \times 511\,\mathrm{keV} \times 10\,\mathrm{eV})^{1/2} = 3,2\,\mathrm{keV}. \tag{17.15}$$

   Dla małych przekazów pędu w przybliżeniu $\Delta p = \theta p = 0,64$ keV.Użyjemy teraz zasady nieoznaczoności (bez 1/2, bo chodzi o rząd wielkości)

   $$\Delta x \simeq \frac{\hbar}{\Delta p} = (0,64\,\mathrm{keV})^{-1} = \frac{197}{0,64}\frac{\mathrm{MeV\ fm}}{\mathrm{keV}} \simeq 3,1 \times 10^{-13}\mathrm{cm} \simeq 3,1\,\mathring{\mathrm{A}},$$

   czyli 4 rzędy wielkości mniej niż promień atomu Bohra.

3. Zgodnie z (17.3) kwadrat ładunku elektronu ma ten sam wymiar co $\hbar c$:

   $$[\mathrm{e}^2] = \frac{m \cdot l^3}{t^2} = [\hbar \cdot c]\,.$$

   Ile wynosi $e^2/\hbar c$, która to kombinacja jest bezwymiarową miarą siły oddziaływań elektromagnetycznych? Z doświadczenia $e^2 = 2,30 \times 10^{-19}$ [cm^{3}g/s^2], $\hbar c = 3,161 \times 10^{-17}$[cm^{3}g/s^2], stąd

   $$\alpha_{\mathrm{ELM}} = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{2,30}{3,16} = 0,72 \times 10^{-2} \simeq \frac{1}{137}. \tag{17.16}$$

   Dokładna wartość $(137,0359895(61))^{-1}$.

4. W klasycznej elektrodynamice siła może być dowolnie duża poprzez kumulację ładunku w jednym miejscu. W fizyce atomowej są ograniczenia: $\Delta p < mc$ aby nie powstawały pary elektron-pozyton, więc $\Delta x > \hbar/mc$ (długość fali Comptona). Ponieważ nie możemy zlokalizować elektronu, więc energia oddziaływania dwóch elektronów jest rzędu (lub mniej)

   $$V = \frac{e^2}{\hbar/mc}.$$

   Naturalną skalą energii dla tego problemu jest energia równoważna masie spoczynkowej elektronu mc^2:

   $$\frac{V}{mc^2} = \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha_{\mathrm{ELM}}. \tag{17.17}$$

   Zatem oddziaływania elektronów są słabe.

5. Wróćmy do skal atomowych. Długość fali Comptona elektronu wynosi $\lambda = \hbar/mc$. Ponieważ mamy do dyspozycji α_{ELM} , które jest bezwymiarowe, możemy budować różne skale wielkości posiadające różne potęgi e. Np.:

$$r_e = \lambda \alpha_{\mathrm{ELM}} = \frac{e^2}{mc^2}, \tag{17.18}$$

gdzie $\hbar$ się uprościło. Jest to więc wielkość klasyczna, często nazywana klasycznym promieniem elektronu. Precyzyjniej, jest to skala klasycznego rozkładu ładunku, którego energia potencjalna jest rzędu masy elektronu. Nie odgrywa ona roli w mechanice kwantowej. Bardziej interesująca jest wielkość

$$a_0 = \frac{\lambda}{\alpha_{\mathrm{ELM}}} = \frac{\hbar^2}{me^2}, \tag{17.19}$$

czyli promień Bohra. Zwróćmy uwagę, że a_0 jest jedyną wilkością o wymiarze długości, która zawiera $\hbar$, m oraz e, bez c. A zatem jest to jedyna skala długości, która charakteryzuje nierelatywistyczne efekty kwantowe w atomie. Analogicznie jedyna nierelatywistyczna skala energii (bez c) daje się zapisać jako

$$E_0 = \frac{e^2}{a_0} = \frac{me^4}{\hbar^2} \tag{17.20}$$

co rzeczywiście odpowiada energii stanu podstawowego z dokładnością do $E_1 = E_0/2$.

6. Inny przykład analizy wymiarowej: ponieważ α_{ELM} jest bezwymiarowa, $e^2/\hbar$ ma wymiar prędkości. Zatem predkość elektronu w atomie wodoru

$$\frac{v}{c} \simeq \alpha \simeq \frac{1}{137}.$$

18 Ruch w polu magnetycznym

18.1 Poziomy Landaua

Dotychczas omówiliśmy dość szczegółowo oddziaływanie cząstki naładowanej z zewnętrznym polem elektrycznym (atom wodoru). Aby opisać także ruch w polu magnetycznym, musimy skwantować odpowiedni hamiltonian klasyczny

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + qV(\vec{r},t), \tag{18.21}$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki, zaś c prędkością światła. Przypomnijmy, że pola elektryczne i magnetyczne wyrażają się przez potencjały w następujący sposób:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{18.22}$$

O ile część elektryczna nie przedstawia problemów, to część zawierająca potencjał wektorowy $\vec{A}$ nie daje się prosto skwantować, gdyż potencjał $\vec{A}$ jest funkcją $\vec{r}$, a $\vec{r}$ nie komutuje z operatorem pędu.

Jako przykład rozpatrzmy ruch elektronu w stałym polu magnetycznym $\vec{B} = (0, 0, B)$. Wygodnie przyjąć potencjał wektorowy w postaci:

$$\vec{A} = B \begin{bmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{18.23}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m_e}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 = \frac{1}{2m_e}\left[\left(\hat{p}_x + \frac{qB}{c}y\right)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right] \\ &= \frac{1}{2m_e}\hat{p}_x^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_z^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_y^2 + \frac{m_e}{2}\left(\frac{qB}{m_e c}\right)^2 y^2 + \frac{qB}{m_e c}y\hat{p}_x. \end{aligned} \tag{18.24}$$

Tu separację zmiennych przeprowadzamy zakładając

$$\psi(x, y, z) = f(y)e^{-ip_x x/\hbar}e^{-ip_z z/\hbar}. \tag{18.25}$$

Podstawiając funkcję (18.25) do równania Schrödingera możemy zastąpić operatory $\hat{p}_z$ i $\hat{p}_x$ przez wartości własne. Oznaczając

$$\tilde{\omega} = \frac{qB}{m_e c} = 2\omega \tag{18.26}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m_e}p_z^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_y^2 + \frac{m_e}{2}\tilde{\omega}^2 y^2 + \tilde{\omega} y p_x + \frac{1}{2m_e}p_x^2 \\ &= \frac{1}{2m_e}p_z^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_y^2 + \frac{m_e}{2}\tilde{\omega}^2\left(y^2 + 2\frac{p_x}{m_e\tilde{\omega}}y + \frac{1}{m_e^2\tilde{\omega}^2}p_x^2\right). \end{aligned} \tag{18.27}$$

Zmieniając zmienne

$$\eta = y + \frac{p_x}{m_e\tilde{\omega}} \tag{18.28}$$

otrzymujemy

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e}p_z^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_\eta^2 + \frac{m_e}{2}\tilde{\omega}^2\eta^2. \tag{18.29}$$

Jest to hamiltonian oscylatora o częstości $\tilde{\omega}$ (plus ruch swobodny w kierunku z):

$$\begin{aligned} E_{N,p_z} &= \hbar\tilde{\omega}\left(N + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m_e} \\ &= \hbar\omega\,(2N + 1) + \frac{p_z^2}{2m_e}. \end{aligned} \tag{18.30}$$

Zwróćmy uwagę, że poziomy te są nieskończenie razy zdegenerowane ze względu na p_x.

Inna metoda znalezienia energii poziomów Landaua opiera się na uzyciu innego cechowania:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}B \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{18.31}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m_e}\left[\left(\hat{p}_x + \frac{qB}{2c}y\right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{qB}{2c}x\right)^2 + \hat{p}_z^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\hbar\tilde{\omega}\left[\frac{\left(\hat{p}_x + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}y\right)^2}{m_e\hbar\tilde{\omega}} + \frac{\left(\hat{p}_x - \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}x\right)^2}{m_e\hbar\tilde{\omega}}\right] + \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}. \end{aligned} \tag{18.32}$$

Definiując nowe operatory

$$\hat{\pi}_x = \frac{\hat{p}_x + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}y}{\sqrt{m_e\hbar\tilde{\omega}}},\ \hat{\pi}_y = \frac{\hat{p}_y - \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}x}{\sqrt{m_e\hbar\tilde{\omega}}}, \tag{18.33}$$

mamy

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\tilde{\omega}\left[\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2\right] + \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}. \tag{18.34}$$

Zbadajmy komutator

$$\left[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y\right] = \frac{1}{m_e\hbar\tilde{\omega}}\left\{-\frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}\left[\hat{p}_x, x\right] + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}\left[y, \hat{p}_y\right]\right\} = i. \tag{18.35}$$

Widzimy zatem, że relacja komutacji $[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y]$ przypomina (z dokładnością do $\hbar$) relację komutacji między położeniem a pędem. Skonstruujmy nowe operatory

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y\right),\ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y\right), \tag{18.36}$$

których relacja komutacji jest w rzeczywistości relacją komutacji operatorów kreacji i anihilacji:

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \frac{i}{2}\left\{-\left[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y\right] + \left[\hat{\pi}_y, \hat{\pi}_x\right]\right\} = 1. \tag{18.37}$$

Z kolei

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2 + i\left[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y\right]\right) = \left(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2 - 1\right), \tag{18.38}$$

czyli

$$\frac{1}{2}\left(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2\right) = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}. \tag{18.39}$$

Zatem

$$\hat{H} = \hbar\tilde{\omega}\left[\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right] + \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}. \tag{18.40}$$

Dostajemy stąd, że energia poziomów Landaua

$$E = \hbar \frac{\tilde{\omega}}{2} (2n + 1) + \frac{p_z^2}{2m_e} \tag{18.41}$$

w zgodzie z (18.30). Zgodnie z naszymi poprzednimi rozważaniami, poziomy Landaua są nieskończenie zdegenerowane. Aby się przekonać, że w cechowaniu (18.31) mamy także do czynienia z nieskończoną degeneracją, zapiszmy operator anihilacji $\hat{a}$ w reprezentacji położeń:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2m_e\hbar\tilde{\omega}}} \left\{ \hat{p}_x + \frac{1}{2} m_e \tilde{\omega} y + i \left(\hat{p}_y - \frac{1}{2} m_e \tilde{\omega} x \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m_e\hbar\tilde{\omega}}} \left\{ -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) - i \frac{1}{2} m_e \tilde{\omega} (x + iy) \right\}. \end{aligned} \tag{18.42}$$

W reprezentacji położeń stan podstawowy spełnia równanie

$$\hat{a} \langle \vec{r} \,|\, 0 \rangle = 0, \tag{18.43}$$

co jest równoważne równaniu różniczkowemu

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{m_e \tilde{\omega}}{2\hbar} (x + iy) \right\} \langle \vec{r} \,|\, 0 \rangle = 0. \tag{18.44}$$

Wielkość $\hbar / m_e \omega$ ma wymiar kwadratu długości i ma sens kwadratu promienia klasycznej orbity elektronu w ruchu w polu magnetycznym $\vec{B}$. Oznaczmy:

$$r_B^2 = \frac{\hbar}{m_e \tilde{\omega}}. \tag{18.45}$$

Wprowadźmy nowe zmienne

$$u = x + iy, \; v = x - iy.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned} \tag{18.46}$$

i równanie (**??**) przyjmuje postać

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{4r_B^2} u \right) \langle \vec{r} \,|\, 0 \rangle = 0. \tag{18.47}$$

Rozwiącanie tego równania jest bardzo proste

$$\langle \vec{r} \,|\, 0 \rangle = f(u) e^{-\frac{uv}{4r_B^2}}, \tag{18.48}$$

gdzie $f(u)$ jest dowolną funkcją spełniającą warunek normalizacji. Zatem rzeczywiście stan podstawowy jest nieskończnie zdegenerowany. Łatwo pokazać, że stany wzbudzone, które otrzymujemy działając na stan podstawowy operatorem

$$\hat{a}^\dagger = -i\frac{r_B}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{4r_B^2}v\right) \tag{18.49}$$

nie znosi tej degeneracji.