Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 2 – 20.10.2016

1. Wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa - dokończenie. Na ostatnich ćwiczeniach wyprowadzilśmy wzór:
$$C = A + \int_0^1 dt \frac{(1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} B \ ,$$
gdzie
$$\varepsilon = e^{\Delta_A} e^{t\Delta_B} - 1.$$
Wzór ten należy rozwinąć w ε, następnie rozwinąć ε z wymaganą dokładnością i scałkować wyraz po wyrazie. Proszę dokonać rozwinięcia do 3 zaplecionych komutatorów.

   Wyprowadzenie to można znaleźć w dodatku D podręcznika J.M. Normanda "Rotations in Quantum Mechanics".

2. Pokazać, że funkcja falowa dana wzorem
$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, t_2; x_1, t_1)\psi(x_1, t_1)\, dx_1,$$
gdzie K jest dane jako całka po trajektoriach w przedstawieniu zdyskretyzowanym
$$K(b, a) \; = \lim_{\epsilon \to 0} \int dx_1 \ldots dx_{N-1} \left(\frac{m}{2i\epsilon\hbar\pi} \right)^{N/2} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} L_{j\to j+1}}$$
spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2 = t_1 + \epsilon$, gdzie ϵ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach. Z kolei $x_1 = x_2 - \eta$. Przedyskutować związek między η a ϵ i przeprowadzić rozwinięcie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1).

   Dla chętnych: Rozwijając z dokładnością do ϵ^2 sprawdzić, czy odtwarza się kwadrat równania Schrödingera. (Okazuje się, że trzeba zmodyfikować człon potencjalny w Lagragianie.)

3. Propagacja przez dwie szczeliny. Zakładając, że w chwili $t = 0$ funkcja falowa ma postać dwóch Gaussów w płaszczyźnie $x - y$ oraz fali płaskiej w kierunku z:
$$\begin{aligned}\Psi(x_0, y_0, z_0, 0) &= G(x_0, y_0, z_0) \\ &= e^{ipz_0} \left[\sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}}\, e^{-\frac{(x_0-a)^2}{2\delta}} + \sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}}\, e^{-\frac{(x_0+a)^2}{2\delta}} \right] \sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}}\, e^{-\frac{y_0^2}{2\delta}}\end{aligned}$$

obliczyć funkcję falową po czasie t. Propagator cząstki swobodnej jest iloczynem trzech propagatorów w kierunku x, y i z, z których każdy ma postać:

$$K(x_b, x_a; t) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar t}}\, e^{im\frac{(x_b - x_a)^2}{2t\hbar}} \,.$$

Obliczyć kwadrat modułu fukcji falowej.

4. Zbadać propagację cząstki przez pojedynczą szczelinę i przedyskutować w tym kontekście zasadę nieoznaczoności (Feynman Hibbs rozdział 3-2).