Mechanika Kwantowa dla doktorantów
zestaw 1 – 13.10.2016

1. Wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa

Udowodnić, że dla dwóch niekomutujących operatorów A i B zachodzi

$$e^A\, e^B = e^C, \tag{1}$$

gdzie

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left\{[A,[A,B]] - [B,[A,B]]\right\} - \frac{1}{24}[A,[B,[A,B]]] + ...$$

W tym celu rozpatrzyć operator $C(t)$ zdefiniowany jako

$$e^{C(t)} = e^A e^{tB}$$

i wyprowdzić równanie różniczkowe jakie spełnia $C(t)$.

W tym celu udowodnić wzór na pochodną eksponenty z operatora $C(t)$:

$$\frac{d}{dt}e^{C(t)} = \int_0^1 d\tau\, e^{\tau C(t)}\dot{C}(t)\, e^{(1-\tau)C(t)} = \int_0^1 d\tau\, e^{(1-\tau)C(t)}\dot{C}(t)\, e^{\tau C(t)}. \tag{2}$$

Następnie zdefiniować operator Δ_X, gdzie X jest pewnym operatorem, a działanie Δ_X na dany operator Y dane jest jako:

$$\Delta_X\, Y = [X, Y]. \tag{3}$$

Jest to wygodny zapis komutatora, gdyż można łatwo (formalnie) zapisać operator odwrotny. Proszę pokazać:

$$e^A\, B\, e^{-A} = e^{\Delta_A} B = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \dots . \tag{4}$$

W tym celu należy zdefiniować

$$B(\tau) = e^{\tau A}\, B\, e^{-\tau A} \text{ z } B(0) = B, \tag{5}$$

napisać równanie różniczkowe na B i rozwiązać je.

Korzystając z własności (4) pokazać, że:

$$\dot{C}(t) = \frac{\Delta_{C(t)}}{1 - e^{-\Delta_{C(t)}}} B = \frac{e^{\Delta_{C(t)}}\, \Delta_{C(t)}}{e^{\Delta_{C(t)}} - 1} B. \tag{6}$$

Aby scałkować ten wzór po t należy dokonać rozwinięcia

$$\dot{C}(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n(n+1)}\,(z-1)^n\right] B\ ,$$

gdzie

$$z = e^{\Delta_A} e^{t\Delta_B}$$

i całkować wyraz po wyrazie.

Wyprowadzenie to można znaleźć w dodatku D podręcznika J.M. Normanda "Rotations in Quantum Mechanics".