Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 15 na dzień 15.6.2016 godz. 12:00

sala B-2-01

1. Pokazać, że równania Maxwella bez ładunków i prądów redukują się dla potencjału $\vec{A}$ do równania falowego
$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$
Rozwinąć $\vec{A}(\vec{r},t)$ na fale płaskie $\exp\left(i\vec{k}\,\vec{r}\right)$ z zależnymi od czasu amplitudami $\vec{a}(\vec{k},t)$. Pokazać, że amlitudy $\vec{a}$ spełniają równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = |\vec{k}|c$. Sprawdzić, że $\vec{a}\perp\vec{k}$ i że pola $\vec{E}$, $\vec{B}$ oraz wektor falowy $\vec{k}$ są wzajemnie prostopadłe.

2. Nienaładowana cząstka o spinie 0 (np. neutralna cząstka π) opisana jest w teorii pola następującą funkcją Lagrange'a
$$L = \frac{1}{2}\int \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - c^2\left|\vec{\nabla}\phi\right|^2 + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2}\phi^2\right] d^3\vec{r},$$
gdzie $\phi = \phi(\vec{r},t)$ jest polem skalarnym opisującym tę cząstkę. Jaki wymiar ma pole ϕ ? Jaki wymiar i sens fizyczny ma występująca w lagrangeanie stała μ ? Znaleźć równania ruchu dla pola ϕ. Przeprowadzając analizę fourierowską analogiczną do tej z poprzedniego zadania dla pola $\vec{A}$ wykazać, że energia wzbudzeń pola ϕ dana jest relatywistycznym wzorem Eisteina
$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 - \mu^2 c^4}.$$

3. Wyprowadzić związek między transformatą fourierowską potencjału elektrycznego
$$\phi_{\vec{k}} = 4\pi\frac{\rho_{\vec{k}}}{k^2}$$
a potencjałem Coulomba w przestrzeni położeń.

4. W rozdziale 9-4 podręcznika Feynmana Hibbsa dyskutuje się przejście układu *promieniowanie–atom* od stanu $|n,0\rangle$ (atom w n-tym stanie wzbudzonym, promieniowanie w stanie podstawowym) do stanu $\left|m,\vec{\sigma}\vec{k}\right\rangle$ (atom w m-tym stanie wzbudzonym + 1 foton o pędzie $\vec{k}$ i polaryzacji $\vec{\sigma}$). Proszę wykazać, że częstość przejść zdefiniowana w rachunku zaburzeń jako $dP/dt = \left|\lambda_{m,n}^{\sigma k,0}\right|^2$ wyraża się wzorem
$$\frac{dP}{dt} = \frac{\omega}{2\pi\hbar c^3}\left|\left(j_{\vec{\sigma}\vec{k}}\right)_{mn}\right|^2 d\Omega,$$
gdzie $\omega = kc$. Rachunek wykonuje się biorąc za zaburzenie S_{int} . $\left(j_{\vec{\sigma}\vec{k}}\right)_{mn}$ jest elementem macierzowym składowej Fourierowskiej prądu między stanami $|n\rangle$ i $|m\rangle$.

5. Wyliczyć $\left(j_{\vec{\sigma}\vec{k}}\right)_{mn}$ w tzw. przybliżeniu dipolowym, tzn. rozwijając $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{q}}$ w składowej Fourierowskiej prądu w szereg. Oznaczając przez $\vec{\mu}_{mn} = \langle m| e\vec{q} |n\rangle$ pokazać, że

$$\frac{dP}{dt} = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \left|\vec{\mu}_{mn}\right|^2 .$$