Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 14 na dzień 8.6.2016 godz. 12:00

sala B-2-01

1. $C(f)$ jest wypukłą funkcją f na przedziale I gdy:

$$C(\mu f_1 + (1-\mu) f_2) \leq \mu\, C(f_1) + (1-\mu)\, C(f_2),$$

gdzie $f_1,\ f_2$ należą do I i $0 \leq \mu \leq 1$. Udowodnić podane na wykładzie twierdzenie (gdzie za C przyjęliśmy $C = e^{-f}$):

$$C(< f >) \leq < C(f) > .$$

Średniowanie $< \cdots >$ definiujemy jako sumę z wagami $0 \leq \mu_i \leq 1$:

$$< a >= \sum_{i=1}^{N} \mu_i\, a_i,$$

gdzie $\sum\limits_{i=1}^{N} \mu_i = 1$.

2. Korzystając z zasady najmniejszego działania, wyprowadzić klasyczne równania pola i równania ruchu cząstki w polu dla działania danego wzorem:

$$\begin{aligned} S &= \sum_j \frac{m_j}{2} \int \dot{\vec{q}}_j(t)^2\, dt \\ &+ \sum_j e_j \int \left\{ \phi[\vec{q}_j(t), t] - \frac{1}{c}\, \dot{\vec{q}}_j \cdot \vec{A}[\vec{q}_j(t), t] \right\} dt \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \left| \vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right|^2 - \left| \vec{\nabla} \times \vec{A} \right|^2 \right\} d^3x\, dt, \end{aligned}$$

w którym zmiennymi są: $\phi(\vec{x}, t)$, $\vec{A}(\vec{x}, t)$ oraz $\vec{q}_i(t)$.

3. Pokazać, że równania Maxwella bez ładunków i prądów redukują się dla potencjału $\vec{A}$ do równania falowego

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Rozwinąć $\vec{A}(\vec{r}, t)$ na fale płaskie $\exp\left(i\vec{k}\,\vec{r}\right)$ z zależnymi od czasu amplitudami $\vec{a}(\vec{k}, t)$. Pokazać, że amlitudy $\vec{a}$ spełniają równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = |\vec{k}|c$. Sprawdzić, że $\vec{a} \perp \vec{k}$ i że pola $\vec{E}$, $\vec{B}$ oraz wektor falowy $\vec{k}$ są wzajemnie prostopadłe.

4. Nienaładowana cząstka o spinie 0 (np. neutralna cząstka π) opisana jest w teorii pola następującą funkcją Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left| \vec{\nabla} \phi \right|^2 + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 \right] d^3 \vec{r},$$

gdzie $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ jest polem skalarnym opisującym tę cząstkę. Jaki wymiar ma pole ϕ ? Jaki wymiar i sens fizyczny ma występująca w lagrangeanie stała μ ? Znaleźć równania ruchu dla pola ϕ. Przeprowadzając analizę fourierowską analogiczną do tej z poprzedniego zadania dla pola $\vec{A}$ wykazać, że energia wzbudzeń pola ϕ dana jest relatywistycznym wzorem Eisteina

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 - \mu^2 c^4}.$$

5. Wyprowadzić związek między transformatą fourierowską potencjału elektrycznego

$$\phi_{\vec{k}} = 4\pi \frac{\rho_{\vec{k}}}{k^2}$$

a potencjałem Coulomba w przestrzeni położeń.