Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 9 na dzień 27.04.2016 godz. 12:00

sala B-2-01

1. Using expansion for the wave function

$$\left\langle \vec{r} \right| \psi^{(+)} \Big\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) i^l A_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

and conditions

$$\beta_l = \frac{r}{A_l} \frac{dA_l}{dr} \bigg|_{r=R},$$

$$\tan\delta_l = \frac{kR\, j_l'(kR) - \beta_l\, j_l(kR)}{kR\, y_l'(kR) - \beta_l\, y_l(kR)} \tag{1}$$

derive general formula (in terms of spherical Bessel functions) for the phase shifts for the finite spherical well ($V_0 > 0$):

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad R < r \\ -V_0 & \text{dla} \quad r < R \end{cases}.$$

In particular calculate $\tan\delta_0$. Discuss two limits $k \to 0$ and $k \to \infty$. How δ_0 depends on V_0?

2. Postępując tak, jak na wykładzie, wyprowadzić ogólny, analogiczny do (1), wzór na f_l w funkcji β_l. W celu wyprowadzenia (1) użyliśmy rozkładu dokładnej funkcji falowej dla konkretnego potencjału na fale parcjalne

$$\left\langle \vec{r} \right| \psi^{(+)} \Big\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) i^l A_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

i porównując ten rozkład z rozkładem tej samej funkcji na fale parcjalne daleko poza zasięgiem potencjału wyprowadziliśmy wzór

$$A_l(kr) = \frac{1}{2}(e^{2i\delta_l} + 1) j_l(kr) + i\frac{1}{2}(e^{2i\delta_l} - 1) y_l(kr),$$

który pozwolił na wyliczenie $\tan\delta_l$. Teraz należy zauważyć, że

$$e^{2i\delta_l} = 1 + 2ik\, f_l$$

i wyprowadzić analogiczny wzór na f_l (uwaga: pojawi się funkcja $h_l^{(+)} = h_l^{(1)} = j_l + i y_l$).

Następnie rozważyć skończoną studnię potencjału, w szczególności wyliczyć f_0. Zbadać, kiedy w amplitudzie f_0 pojawiają się nieskończoności i powiązać je ze stanem związanym o energii.

3. Rozważyć rozpraszanie na odpychającym potencjale ($\gamma > 0$)

$$\frac{2m}{\hbar^2} V(r) = \gamma \delta(r - R).$$

Napisać odpowiednie równanie Schroedingera. Następnie dla $l = 0$ rozwiązać to równanie na lewo i na prawo od potencjału i wyprowadzić warunki zszycia funkcji falowej. Wyprowadzić wzór na $\tan \delta_0$. Rozważyć przypadek, kiedy γ jest bardzo duże. Następnie dla dowolnego γ pokazać, że dla kR małego (ale nie równego 0) pojawia się zachowanie rezonansowe $\cot \delta_0$ w funkcji energii (czyli $\cot \delta_0 = -c(E - E_r)$, co jest równe zeru dla $E = E_r$). Znaleźć pozycje rezonansów i ich szerokości.