Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 7 na dzień 20.04.2016 godz. 12:00

sala B-2-01

1. Posługując się wzorem na $f^{(1)}(\theta)$ dla przybliżenia Borna dla potencjału Yukawy:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}$$

i zakładając, że przesunięcia fazowe $|\delta_l| \ll 1$, wyprowadzić wzór na δ_l wyrażony poprzez funkcje Legendre'a $Q_l(\zeta)$ zdefiniowane jako

$$Q_l(\zeta) = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} d\zeta' \frac{P_l(\zeta')}{\zeta - \zeta'}.$$

Wykazać, że Q_l są rozwiązaniami r. Legendre'a. Proszę wyprowadzić rozwinięcie dla $|\zeta| > 1$

$$Q_l(\zeta) = \frac{l!}{1 \cdot 3 \ldots (2l+1)} \times \left\{ \frac{1}{\zeta^{l+1}} + \frac{(l+1)(l+2)}{2 \cdot (2l+3)} \frac{1}{\zeta^{l+3}} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2l+3)(2l+5)} \frac{1}{\zeta^{l+5}} + \ldots \right\} \quad (1)$$

Korzystając z (1) proszę udowodnić, że

(a) δ_l jest ujemne (dodatnie) gdy potencjał jest przyciągający (odpychający), t.j. $V_0 < 0$ ($V_0 > 0$);

(b) dla fali de Broglie'a znacznie „dłuższej" niż zasięg potencjału

$$\delta_l = \text{const} \times k^{2l+1}.$$

(c) Znaleźć wzór na współczynnik proporcjonalności const.

WSKAZÓWKA

Skorzystać ze wzoru:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \, P_l(\cos\theta).$$

2. Wielomiany Legendre'a można wyliczyć z następującego wzoru:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \, l!} \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l.$$

Sprawdzić na przykładzie kilku wartości l, że jest to poprawny wzór. Z kolei sferyczne funkcje Bessela mają następujące przedstawienie całkowe:

$$j_l(x) = \frac{1}{2}\frac{(x/2)^l}{l!}\int\limits_{-1}^{1} dt\, e^{ixt}(1-t^2)^l.$$

Sprawdzić, że tak zdefiniowane funkcje spełniają równanie na sferyczne funkcje Bessela. Korzystając podanej wyżej formuły na wielominay Legendre'a wykazać, że

$$j_l(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{i^l}\int\limits_{-1}^{1} dt\, e^{ixt} P_l(t).$$

Korzystając z tego wzoru wyprowadzić użyty na wykładzie rozkład fali płaskiej na fale parcjalne.

3. Using expansion for the wave function

$$\psi = \sum_l (2l+1) i^l A_l(r) P_l(\cos\vartheta)$$

and conditions

$$\beta_l = \frac{r}{A_l}\frac{dA_l}{dr}\Big|_{r=R},$$

$$\tan\delta_l = \frac{kR\, j_l'(kR) - \beta_l\, j_l(kR)}{kR\, y_l'(kR) - \beta_l\, y_l(kR)}$$

derive general formula (in terms of spherical Bessel functions) for the phase shifts for the finite spherical well ($V_0 > 0$):

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad R < r \\ -V_0 & \text{dla} \quad r < R \end{cases}.$$

In particular calculate $\tan\delta_0$. Discuss two limits $k \to 0$ and $k \to \infty$. How δ_0 depends on V_0?