Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 7 na dzień 13.04.2016 godz. 12:00

sala B-2-01

1. For an infinte "hard ball"potential:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad a < r \\ \\ \infty & \text{dla} \quad r < a \end{cases}$$

calculate the phase shifts from the conditon $R_{kl}(a) = 0$. Find low energy behaviour of δ_l. Calculate the cross-section for the lowest partial wave $l = 0$. As you will see the cross-section is not geometrical i.e. $\sigma \neq \pi R^2$.

2. Sum up higher partial waves

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l(k)$$

up to a maximal clasically allowed $l_{\max} \sim ka$. To this end use

$$\sin^2 \delta_l(k) = \frac{\tan^2 \delta_l(k)}{1 + \tan^2 \delta_l(k)}$$

and the formula for $\tan \delta_l(k)$ in terms of spherical Bessel functions. Then use asymptotic form of Bessel functions. The resulting cross-section is still not geometrical ($\sigma_{\text{tot}} = 2\pi a^2$). Try to interpret this result (Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Chapt.7.6).

3. (Przypomnienie) Rozważyć rozpraszanie na potencjale Yukawy:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r},$$

gdzie $1/\mu$ jest zasięgiem oddziaływania. Wyliczyć amplitudę rozpraszania w pierwszym przybliżeniu Borna $f^{(1)}(\theta)$, gdzie θ jest kątem rozproszenia. Wyliczyć różniczkowy przekrój czynny $d\sigma/d\Omega$, zbadać granicę $\mu \to 0$ (potencjał Coulomba).

4. Posługując się wzorem na $f^{(1)}(\theta)$ dla przybliżenia Borna dla potencjału Yukawy:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}$$

i zakładając, że przesunięcia fazowe $|\delta_l| \ll 1$, wyprowadzić wzór na δ_l wyrażony poprzez funkcje Legendre'a $Q_l(\zeta)$ zdefiniowane jako

$$Q_l(\zeta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\zeta' \frac{P_l(\zeta')}{\zeta - \zeta'}.$$

Wykazać, że Q_l są rozwiązaniami r. Legendre'a. Proszę wyprowadzić rozwinięcie dla $|\zeta| > 1$

$$\begin{aligned} Q_l(\zeta) = & \frac{l!}{1 \cdot 3 \ldots (2l+1)} \\ & \times \left\{ \frac{1}{\zeta^{l+1}} + \frac{(l+1)(l+2)}{2 \cdot (2l+3)} \frac{1}{\zeta^{l+3}} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2l+3)(2l+5)} \frac{1}{\zeta^{l+5}} + \ldots \right\} \end{aligned} \tag{1}$$

Korzystając z (1) proszę udowodnić, że

(a) δ_l jest ujemne (dodatnie) gdy potencjał jest przyciągający (odpychający), t.j. $V_0 < 0$ ($V_0 > 0$);

(b) dla fali de Broglie'a znacznie „dłuższej” niż zasięg potencjału

$$\delta_l = \text{const} \times k^{2l+1}.$$

(c) Znaleźć wzór na współczynnik proporcjonalności const.
WSKAZÓWKA
Skorzystać ze wzoru:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l \, P_l(\cos \theta).$$