Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 4 na dzień 23.03.2016 godz. 12:00

sala B-2-01

1. Consider Euclidean motion (in an inverted potential) of a given energy $E < 0$, leading from $x_1 \to x_2$ ($x_1 < x_2$) in time T. As a potential take $V(x) = \kappa(x^2 - a^2)^2$ with $\kappa = 1/8a^2$. For one instanton-like motion (without turning) it is clear that as $T \to \infty$ then $x_1 \to -a$, $x_2 \to a$ and $E \to 0$. Show that in this limit

$$E = -8a^2 e^{-T}.$$

   HINT. Use the classical formula for T. In the limit $E \to 0$ the integral will contain a singular part that can be divided into a finite and still singular part by subtracting and adding $((x-a)^2 + 2E)^{-1/2}$. In the finite part one can immediately set $E = 0$. The other part can be calculated exactly for finite, but small E.

2. Zadanie do wykładu 6 z pierwszego semestru. Cząstka o masie m i ładunku e porusza się w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z. Funkcja Lagrange'a dla tego przypadku ma postać (dlaczego?):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

   Wyliczyć propagator dla ruchu od punktu $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ do punktu $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ w czasie T.

   Wsakzówka: Wygodnie jest wprowadzić zmienne $x'(t)$ i $y'(t)$, które odpowiadają przejściu do układu obracającego się ze stałą prędkością kątową α. Należy tak dobrać α aby w tym nowym układzie funkcja Lagrange'e rozseparowała się na trzy niezależne funkcje opisujące ruch cząstki swobodnej i dwa oscylatory harmoniczne. Pozwala to na natychmiastowe napisanie propagatora, który następnie trzeba przepisać w zmiennych wyjściowych.

3. Derive the Van Vleck formula

$$F(T) = \left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}\right)^{1/2}$$

   for the "quantum"part of the propagator

$$K = F(T) \exp \frac{i}{\hbar} S_{\rm cl}$$

   for one dimensional problem of a particle moving in potential V. Start from the Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K(x, x_0; t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right] K(x, x_0; t),$$

write

$$K = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S + \ln F + \dots\right)$$

and expand K in powers of $\hbar$. Show that in the first two orders in $\hbar$ the Schrödinger equation reduces to

$$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\partial_x S)^2 + V(x) = 0, \tag{1}$$

and

$$\partial_t(\ln F) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 S + \frac{1}{m}\partial_x S \partial_x(\ln F) = 0. \tag{2}$$

Differentiate (1) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0}$ and show that the equation obtained that way is identical to (2) where $\ln F$ has been replaced by $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}$ up to a constant that can be fixed from the normalization condition of the propagator for $t \to 0$:

$$K(x_b, x_a; t = 0) = \delta(x_b - x_a).$$

4. Dla propagatora cząstki w polu magnetycznym z zadania 2 sprawdzić uogólniony wzór Van Vleck'a wyliczając

$$F = \text{const.}\,\det\left(-\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial \vec{a} \partial \vec{b}}\right),$$

gdzie F jest czynnikiem normalizującym propagator ($K = Fe^{i\cdots}$).