Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw20 na dzień 25.4.2014 godz. 8:30

sala 431a

1. Rozważyć rozpraszanie na potencjale Yukawy:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r},$$

gdzie $1/\mu$ jest zasięgiem oddziaływania. Wyliczyć amplitudę rozpraszania w pierwszym przybliżeniu Borna $f^{(1)}(\theta)$, gdzie θ jest kątem rozproszenia. Wyliczyć różniczkowy przekrój czynny $d\sigma/d\Omega$, zbadać granicę $\mu \to 0$ (potencjał Coulomba).

2. Posługując się wzorem na $f^{(1)}(\theta)$ dla przybliżenia Borna dla potencjału Yukawy:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}$$

i zakładając, że przesunięcia fazowe $|\delta_l| \ll 1$, wyprowadzić wzór na δ_l wyrażony poprzez funkcje Legendre'a $Q_l(\zeta)$ zdefiniowane jako

$$Q_l(\zeta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\zeta' \frac{P_l(\zeta')}{\zeta - \zeta'}.$$

Wykazać, że Q_l są rozwiązaniami r. Legendre'a. Proszę wyprowadzić rozwinięcie dla $|\zeta| > 1$

$$Q_l(\zeta) = \frac{l!}{1 \cdot 3 \ldots (2l+1)} \times \left\{ \frac{1}{\zeta^{l+1}} + \frac{(l+1)(l+2)}{2 \cdot (2l+3)} \frac{1}{\zeta^{l+3}} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2l+3)(2l+5)} \frac{1}{\zeta^{l+5}} + \ldots \right\} \quad (1)$$

Korzystając z (1) proszę udowodnić, że

(a) δ_l jest ujemne (dodatnie) gdy potencjał jest przyciągający (odpychający), t.j. $V_0 < 0$ ($V_0 > 0$);

(b) dla fali de Broglie'a znacznie „dłuższej" niż zasięg potencjału

$$\delta_l = \text{const} \times k^{2l+1}.$$

(c) Znaleźć wzór na współczynnik proporcjonalności const.
WSKAZÓWKA
Skorzystać ze wzoru:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l \, P_l(\cos\theta).$$

3. Proszę rozważyć radialne równanie Schrödingera w potancjale $V(r) \to 0$ dla $r \to \infty$ dla energii $E = \hbar^2 k^2/(2m) > 0$ przyjmując, że funkcja falowa separuje się na część kątową i radialną
$$\psi_{klm}(\vec{r}) = R_{kl}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi).$$
Dla dużych r (lub dla cząstki swobodnej) gdy potencjał znika, równanie to jest znane jako zmodyfikowane równanie Bessela. Rozwiązać to równanie dla $l = 0$ definiując nową funkcję $u(r) = r\, R_{k0}(r)$.

   Aby rozwiązać to równanie dla $l \neq 0$ należy

   - zdefiniować $\chi_{kl}(r) = R_{kl}(r)/r^l$ i wyprowadzić równanie na $\chi_{kl}(r)$,
   - zróżniczkować to równanie po r,
   - zdefiniować nową funkcję $f_{kl}(r) = r\, \chi'_{kl}(r)$,
   - porównać równanie na f_{kl} z wyjściowym równaniem na χ_{kl} i zgadnąć wzór rekurencyjny łączący χ_{kl+1} z χ_{kl},
   - rozwiązać rekurencję i znaleźć $R_{kl}(r)$ dla $l = 1, 2$,
   - znaleźć asymptotykę $R_{kl}(r)$ dla dużych r,
   - startując z wyjściowego równania na $R_{kl}(r)$ znaleźć zachowanie w zerze.

4. Przedyskutować, jak wyglądają rozwiązania równania Schrödingera w potancjale sztywnej kuli
$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{dla} \quad r < R \\ 0 & \text{dla} \quad R \leqslant r \end{cases}$$