Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw18 na dzień 1.4.2014 godz. 13:15

sala 431a

1. Skonstruować znormalizowany stan własny operatora anihilacji (nazywany stanem koherentnym lub kwaziklasyczym):

$$\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle\,. \tag{1}$$

Wtym celu rozwinąć $|z\rangle$ w bazie stanów własnych oscylatora harmonicznego, znaleźć i rozwiązać rekurencję dla współczynników tego rozwinięcia.

   (a) Wyliczyć średnie $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w tym stanie i średnie odchylenia kwadratowe.

   (b) Sprawdzić zasadę nieoznaczoności.

   (c) Obliczyć iloczyn skalarny $\langle z\,|z'\rangle$.

2. Znaleźć jawną postać (nieznormalizowanej) funkci falowej stanu $|z\rangle$ w reprezentacji położeń $\psi_z(x) = \langle x|\,z\rangle$ oraz w przestrzeni pędów $\tilde{\psi}_z(p) = \langle p|\,z\rangle$. Obie te funkcje można znaleźć rozwiązując równania różniczkowe odpowiadające (1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_z(\xi) &= z\,\psi_z(\xi), \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\pi + \frac{d}{d\pi}\right)\tilde{\psi}_z(\pi) &= z\,\tilde{\psi}_z(\pi), \end{aligned}$$

gdzie $\pi = p/\sqrt{m\hbar\omega} = -id/d\xi$, $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x = id/d\pi$.

3. Jak wygląda ewolucja w czasie stanu $|z\rangle$? Proszę wyliczyć z zależnego od czasu równania Schrödingera zależność czasową stanów $|n\rangle$ i podstawić do wzoru na $|z\rangle$ uwzględniając znane wyrażenie na energię stanów własnych oscylatora harmonicznego. Zakładając, że w chwili $t = 0$ układ jest w stanie $z = \rho e^{i\varphi}$ pokazać, że w chwili poźniejszej t układ jest też w stanie kwaziklasycznym

$$e^{-i\omega t/2}\,|z\,(t)\rangle$$

gdzie $z(t) = \rho e^{-i(\omega t - \varphi)}$. Wyliczyć średnie $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w tym stanie (najlepiej korzystając z wyników zadania 1).

4. Konstrukcja stanu „kota Schrödingera".

W przedziale czasowym $t \in [0, T]$, dodajemy do hamiltonianu oscylatora harmonicznego człon

$$\hat{W} = g\hbar(\hat{a}^\dagger a)^2. \tag{2}$$

Stała g jest na tyle duża ($g \gg \omega,\ \omega T \ll 1$), że dla $0 \le t \le T$

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{osc}} + \hat{W} \simeq \hat{W}. \tag{3}$$

W chwili $t = 0$ układ jest w stanie $|\psi(0)\rangle = |z\rangle$.

(a) Znaleźć ewolucję czasową stanu $|\psi(t)\rangle$ gdy hamiltonian ma postać (3). W tym celu zapisać $|\psi(t)\rangle$ w bazie stanów $|n\rangle$ i rozwiązać zależne od czasu równanie Schrödingera. Skorzystać z faktu, że $(\hat{a}^\dagger a)^2 |n\rangle = n^2 |n\rangle$.

(b) Stan $|\psi(T)\rangle$ znacznie się upraszcza dla $T = 2\pi/g$ lub $T = \pi/g$. Jak wyglądają stany $|\psi(T)\rangle$ dla tych wartości T?

(c) Wybieramy $T = \pi/2g$. Wykazać, że wtedy

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{-i\pi/4} |z\rangle + e^{i\pi/4} |-z\rangle \right\}. \tag{4}$$

(d) Załóżmy, że $z = i\rho$. Przedyskutować fizyczną interpretację stanów $|z\rangle$ i $|-z\rangle$. Ile wynoszą średnie położenia i jak skierowane są średnie pędy w tych stanach? Dla $\rho \to \infty$ stany $|z\rangle$ i $|-z\rangle$ są makroskopowo różne, dlatego stan $|\psi(T)\rangle$ można uważać za konkretną realizację "kota Schrödingera".