Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw11 na dzień 14.1.2014 godz. 13:45

sala 431a

1. Obliczyć rozszczepienie energii poziomów energetycznych w potencjale o dwóch minimach pochodzące od instantonów. W tym celu należy obliczyć amplitudę przejścia n.p. od $-a \to -a$ w czasie $T \to \infty$. Dla dużych T jest ona zdominowana przez stany o najniższych energiach:

$$\langle -a| e^{-HT/\hbar} |-a\rangle = \sum_n |\psi(-a)|^2 e^{-E_n T/\hbar} \simeq C\left(e^{-(E_0-\delta)T/\hbar} + e^{-(E_0+\delta)T/\hbar}\right) + \dots \quad (1)$$

gdzie δ jest szukanym (małym) rozszczepieniem. W tym celu zauważyć, że

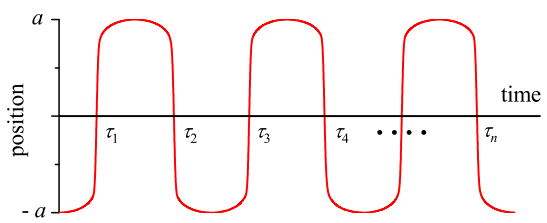
$$\begin{aligned}\langle -a| e^{-HT/\hbar} |-a\rangle &= \sum_{\text{even } n} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{T/2} d\tau_2 \dots \int_{\tau_{n-1}}^{T/2} d\tau_n \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S_{\text{cl}}[\bar{x}_{\tau_1\dots\tau_n}]\right) \\ &\times \int D[y(\tau)] \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int y(\tau) D_\tau y(\tau)\right), \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie $\bar{x}_{\tau_1\dots\tau_n}$ jest klasyczną trajektorią złożoną z instantonów i antyinstantonów a $\tau_{1,2\dots n}$ są czasami przejścia poszczególnych instantonów (antyinstantonów) przez zero. $D[y(\tau)]$ jest całką po trajektoriach kwantowych wokół $\bar{x}_{\tau_1\dots\tau_n}$. Obliczenia wykonujemy w przybliżeniu „rozrzedzonego gazu instantonowego”

$$T_0 = -T/2 \ll \tau_1 \ll T_1 \ll \tau_2 \dots \ll T_{n-1} \ll \tau_n \ll T_n = T/2$$

gdzie czasy T_k są czasami, gdzie trajektoria klasyczna jest w dobrym przybliżeniu w jednym z minimów (patrz rysunek):

$$\bar{x}_{\tau_1\dots\tau_n}(T_k) = -(-)^k a. \quad (3)$$



Rysunek 1: Klasyczna trjektoria zlozona z wielu instantonow.

W takim przybliżeniu

$$S_{\text{cl}}[\bar{x}_{\tau_1\dots\tau_n}] \simeq nS_0$$

gdzie S_0 jest działaniem dla jednego instantonu.

Aby obliczyć część kwantową korzystając z wyniku otrzymanego dla jednego instantonu, zauważmy że całkę po $D[y(\tau)]$ można zinterpretować jako propagator K dla trajektorii klasycznej $\bar{x} = 0$

$$\int D[y(\tau)] \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int y(\tau) D_\tau y\,(\tau)\right) = K(0, T/2; 0, -T/2).$$

Jeśli tak, to możemy zastosować znany wzór na składanie propagatorów w czasach pośrednich T_k:

$$\begin{aligned} K(0, T/2; 0, -T/2) \;=\; & \int K(0, T/2; y_{n-1}, T_{n-1}) dy_{n-1} K(y_{n-1}, T_{n-1}; y_{n-2}, T_{n-2}) dy_{n-2} \\ & \ldots dy_1 K(y_1, T_1; 0, -T/2). \end{aligned} \tag{4}$$

Możemy teraz zastosować wzór dla jednego instantonu:

$$K(y_k, T_k; y_{k-1}, T_{k-1}) \simeq \tilde{K}\, K^{\text{osc}}(y_k, T_k; y_{k-1}, T_{k-1}).$$

Wykazać, że ostatecznie

$$\int D[y(\tau)] \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int y(\tau) D_\tau y\,(\tau)\right) \simeq \tilde{K}^n K^{\text{osc}}(0, T/2; 0, -T/2). \tag{5}$$

Wykonując całkę po $d\tau_1 \ldots d\tau_n$, która daje $T^n/n!$, wysumowując po n i podstawiając jawną postać dla euklidesowego K^{osc} ze wzoru (5) pokazać, że

$$\delta = \hbar \tilde{K} e^{-S_0/\hbar}.$$

Ile wynosi współczynnik proporcjonalności C we wzorze (1) ?

2. Consider Euclidean motion (in an inverted potential) of a given energy $E < 0$, leading from $x_1 \to x_2$ ($x_1 < x_2$) in time T. As a potential take $V(x) = \kappa(x^2 - a^2)^2$ with $\kappa = 1/8a^2$. For one instanton-like motion (without turning) it is clear that as $T \to \infty$ then $x_1 \to -a$, $x_2 \to a$ and $E \to 0$. Show that in this limit

$$E = -8a^2 e^{-T}.$$

HINT. Use the classical formula for T. In the limit $E \to 0$ the integral will contain a singular part that can be divided into a finite and still singular part by subtracting and adding $((x-a)^2 + 2E)^{-1/2}$. In the finite part one can immediately set $E = 0$. The other part can be calculated exactly for finite, but small E.