Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 8 na dzień 3.12.2013 godz. 13:45

sala 431a

1. Dlaczego otrzymany przez nas na poprzednich ćwiczeniach propagator cząstki poruszajacej się w stałym polu magnetycznym nie jest translacyjnie niezmienniczy?

2. Porównując wzór na propagator oscylatora harmonicznego w reprezentacji energetycznej
$$K(x_2,t_2;x_1,t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)\psi_n^*(x_1)\,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t_2-t_1)\right)$$
z jawnym wzorem na K znaleźć pierwsze dwie funkcje własne oscylatora $\psi_{1,2}$ oraz odpowiadające im energie własne E_n. W tym celu użyć dla K wzoru
$$K(x_2,t_2;x_1,t_1)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\,\sin\omega t}}e^{\frac{i}{\hbar}S_{\rm cl}},$$
gdzie działanie klasyczne zostało wyliczone poprzednio.

   WSKAZÓWKA. Spsób wyznaczania wektorów własnych jest omówiony w podręczniku Feynmana Hibbsa, rozdział 8-1. Warto użyć zmiennych przeskalowanych $\xi=\sqrt{m\omega/\hbar}\,x$ oraz $\psi_n(x)=(m\omega/\,\pi\hbar)^{1/4}\phi_n(\xi)$. Zapisanie funkcji trygonometrycznych w postaci $e^{\pm i\omega T}$pozwala na rozwinięcie K w szereg
$$K\sim e^{-i\omega T/2}(a_0+a_1e^{-i\omega T}+a_2e^{-i2\omega T}+\ldots).$$

3. Derive the Van Vleck formula
$$F(T)=\left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}\right)^{1/2}$$
for the "quantum"part of the propagator
$$K=F(T)\exp\frac{i}{\hbar}S_{\rm cl}$$
for one dimensional problem of a particle moving in potential V. Start from the Schrödinger equation
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x,x_0;t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]K(x,x_0;t),$$
write
$$K=\exp\left(\frac{i}{\hbar}S+\ln F+\ldots\right)$$

and expand K in powers of $\hbar$. Shown that in the first two orders in $\hbar$ the Schrödinger equation reduces to

$$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\partial_x S)^2 + V(x) = 0, \tag{1}$$

and

$$\partial_t(\ln F) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 S + \frac{1}{m}\partial_x S \partial_x(\ln F) = 0. \tag{2}$$

Differenciate (1) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0}$ and show that the equation obtained that way is identical to (2) where $\ln F$ has been replaced by $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}$ up to a constant that can be fixed from the normalization condition of the propagator for $t \to 0$:

$$K(x_b, x_a; t = 0) = \delta(x_b - x_a).$$

4. Dla propagatora cząstki w polu magnetycznym z zadania 1 sprawdzić uogólniony wzór Van Vleck'a wyliczając

$$F = \text{const.}\det\left(-\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial \vec{a}\partial \vec{b}}\right),$$

gdzie F jest czynnikiem normalizującym propagator ($K = Fe^{i\cdots}$).