Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 2 na dzień 11.10.2013 godz. 8:30

(wyjątkowo zamiast wykładu)

1. Wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa

   Proszę dokończyć zadanie 1 z poprzedniego zestawu, gdzie wykazaliśmy, że operator $C(t)$

   $$e^{C(t)} = e^A e^{tB}$$

   spełnia równanie różniczkowe

   $$\dot{C}(t) = \frac{\Delta_{C(t)}}{1 - e^{-\Delta_{C(t)}}} B = \frac{e^{\Delta_{C(t)}} \Delta_{C(t)}}{e^{\Delta_{C(t)}} - 1} B.$$

   Aby scałkować ten wzór po t należy dokonać rozwinięcia

   $$\dot{C}(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n(n+1)} z^n \right] B \ ,$$

   gdzie

   $$z = e^{\Delta_A} e^{t\Delta_B} - 1$$

   i całkować wyraz po wyrazie. Proszę pamiętać, że zmienna z jest też szeregiem.

2. Pokazać, że funkcja falowa dana wzorem

   $$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, t_2; x_1, t_1) \psi(x_1, t_1) \, dx_1,$$

   gdzie K jest dane jako całka po trajektoriach, spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2 = t_1 + \epsilon$, gdzie ϵ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach. Z kolei $x_1 = x_2 - \eta$. Przedyskutować związek między η a ϵ i przeprowadzić rozwinięcie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1).

   Dla chętnych: Rozwijając z dokładnością do ϵ^2 sprawdzić, czy odtwarza się kwadrat równania Schrödingera. (Okazuje się, że trzeba zmodyfikować człon potencjalny w Lagragianie.)

3. Lagrange function for the harmonic oscillator reads:

   $$L = \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - \frac{m\omega^2}{2} x(t)^2.$$

   Calculate the classical trajectory leading from point $(x_a, t_a) \to (x_b, t_b)$. Calculate classical action along this trajectory.

   HINT: After finding classical trajectory $\bar{x}(t)$, calculate the action integrating by parts and using equations of motion.