Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 27 na dzień 16.5.2013 czwartek 8:30

sala na antresoli 431

1. (Dokończenie) Załóżmy, że umiemy rozwiązać równanie radialne dla centralnego potencjału $V(r)$ o skończonym zasięgu R. Rozwiązanie to, dla $E = \hbar^2 k^2/2m > 0$ można zapisać ogólnie jako

$$\sum_l (2l+1) i^l A_l(r) P_l(\cos\vartheta), \tag{1}$$

gdzie $A_l(r)$ jest w związku z tym znaną funkcją. Pokazać, że przesunięcie fazowe daje się wyliczyć ze wzoru:

$$\tan\delta_l = \frac{kR\, j_l'(kR) - \beta_l\, j_l(kR)}{kR\, y_l'(kR) - \beta_l\, y_l(kR)}$$

gdzie j_l oraz y_l są sferycznymi funkcjami Bessela.

2. We have considered last time scattering off an infinte "hard ball":

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad R < r \\ \infty & \text{dla} \quad r < R \end{cases}.$$

and found that the cross-section for the lowest partial wave $l = 0$ equals $\sigma_{\text{tot}} = 4\pi R^2$. Sum up higher partial waves

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2\delta_l(k)$$

up to a maximal clasically allowed $l_{\max} \sim kR$. To this end use

$$\sin^2\delta_l(k) = \frac{\tan^2\delta_l(k)}{1 + \tan^2\delta_l(k)}$$

and the formula for $\tan\delta_l(k)$ in terms of spherical Bessel functions. Then use asymptotic form of Bessel functions. The resulting cross-section is still not geometrical ($\sigma_{\text{tot}} = 2\pi R^2$). Try to interpret this result (Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Chapt.7.6).

3. Using expansion for the wave function from problem 1

$$\psi = \sum_l (2l+1) i^l A_l(r) P_l(\cos\vartheta)$$

and conditions

$$\beta_l = \frac{r}{A_l}\frac{dA_l}{dr}\bigg|_{r=R},$$

$$\tan\delta_l = \frac{kR\, j_l'(kR) - \beta_l\, j_l(kR)}{kR\, y_l'(kR) - \beta_l\, y_l(kR)}$$

derive general formula (in terms of spherical Bessel functions) for the scattering length for the finite spherical well ($V_0 > 0$):

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad a < R \\ \\ -V_0 & \text{dla} \quad r < R \end{cases} .$$

In particular calculate $\tan\delta_0$. Discuss two limits $k \to 0$ and $k \to \infty$. How δ_0 depends on V_0?