Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 14 na dzień 25.1.2013 piątek 8:30
zestaw 15 na dzień 28.1.2013 pioniedziałek 10:30

1. Wyliczyć propagator cząstki poruszającej się po okręgu. W tym celu należy wysumować propaagaor cząstki swobodnej po wszystkich możliwych „nawinięciach". Proszę spróbować przepisać orzymany propagator w zmiennych biegunowych wprowadzając moment bezwładności $I = mR^2$ i moment pędu.

2. Derive commutation relation, *i.e.* calculate the following transition amplitude:

$$\langle\chi|\, m\frac{1}{\epsilon}\left((x_{k+1}-x_k)x_k - x_{k+1}(x_{k+1}-x_k)\right)|\psi\rangle_S\,,$$

   where

$$\langle\chi\,|F|\,\psi\rangle_S = \iint dx_1 dx_2\, \chi^*(x_2)\left[\int_{x_1}^{x_2}[\mathcal{D}(x(t)]\;F[x(t)]\,e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}\right]\psi(x_1).$$

   HINT. Since $x_k = x(t_k)$ and $x_{k+1} = x(t_k+\varepsilon)$ it is enough to consider evolution of the wave function by one step of ε in time (only for expressions involving $x_{k+1}x_k$).

3. W podręczniku Feynmana-Hibbsa jest wyprowadzona tożsamość:

$$\left\langle\frac{\delta F}{\delta x(s)}\right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar}\left\langle F\frac{\delta S}{\delta x(s)}\right\rangle_S,$$

   która w wersji dyskretnej ma postać

$$\left\langle\frac{\delta F}{\delta x_k}\right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar}\left\langle F\frac{\delta S}{\delta x_k}\right\rangle_S,$$

   gdzie

$$\langle F\rangle_S = \int[\mathcal{D}(x(t)]\;F[x(t)]\,e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}.$$

   Korzystając z tej tożsamości wykazać, że dla cząstki w 3 wymiarach:

$$<(x_{k+1}-x_k)^2>=<(y_{k+1}-y_k)^2>=<(z_{k+1}-z_k)^2>=\frac{i\epsilon\hbar}{m},$$

$$<(x_{k+1}-x_k)(y_{k+1}-y_k)>=<(z_{k+1}-z_k)(y_{k+1}-y_k)>=<(x_{k+1}-x_k)(z_{k+1}-z_k)>=0,$$

   gdzie opuściliśmy indeks S w wyrażeniach $\langle\ldots\rangle_S$.

4. Pokazać, że dla oscylatora harmonicznego zachodzą związki:

$$\begin{aligned}
<x(t)> &= \overline{x}(t) <1> \\
<x(t)x(s)> &= [\overline{x}(t)\overline{x}(s) + g(s,t)] <1> \\
<x(t)x(s)x(u)> &= [\overline{x}(t)\overline{x}(s)\overline{x}(u) + \overline{x}(t)g(s,u) + \overline{x}(s)g(t,u) + \overline{x}(u)g(t,s)] <1>
\end{aligned}$$

gdzie $\overline{x}(t)$ jest klasyczną trajektorią, a $g(t,s)$ dane jest wzorem:

$$g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega \sin \omega T} \sin \omega (t_2 - t) \sin \omega (s - t_1), \quad s < t$$

$$g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega \sin \omega T} \sin \omega (t_2 - s) \sin \omega (t - t_1), \quad t < s.$$

Wskazówka: Wyprowadzić wzór:

$$\left\langle \exp \frac{i}{\hbar} \int dt f(t) x(t) \right\rangle_S = \exp \frac{i}{\hbar} (S'_{cl} - S_{cl}) < 1 >_S$$

i podstawić do niego znane wyrażenia na dzialanie dla oscylatora bez wymuszenia (S_{cl}) i z wymuszeniem $f(t)$ (S'_{cl}). Wypisując różnicę przekonać się, że:

$$S'_{cl} - S_{cl} = \frac{i}{2\hbar} \int \int f(t) f(s) g(t,s) dt ds + \int f(t) \overline{x}(t) dt.$$

Różniczkując ten wzór ze względu na f otrzymujemy kolejno wzory, o które chodzi w zadaniu.