Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 12 na dzień 14.1.2013 poniedziałek

godz. 10:30, sala 128

1. Porównując ogólny wzór na propagator oscylatora harmonicznego

$$K(x_2,t_2;x_1,t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)\psi_n^*(x_1)\,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t_2-t_1)\right)$$

z jawnym wzorem na K znaleźć pierwsze dwie funkcje własne oscylatora $\psi_{1,2}$,oraz odpowiadające im energie własne E_n. W tym celu użyć dla K wzoru

$$K(x_2,t_2;x_1,t_1)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\,\sin\omega t}}e^{\frac{i}{\hbar}S_{\rm cl}},$$

gdzie działanie klasyczne zostało wyliczone poprzednio.

WSKAZÓWKA. Spsób wyznaczania wektorów własnych jest omówiony w podręczniku Feynmana Hibbsa, rozdział 8-1. Warto użyć zmiennych przeskalowanych $\xi=\sqrt{m\omega/\hbar}\,x$ oraz $\psi_n(x)=(m\omega/\,\pi\hbar)^{1/4}\phi_n(\xi)$. Zapisanie funkcji trygonometrycznych w postaci $e^{\pm i\omega T}$pozwala na rozwinięcie K w szereg

$$K\sim e^{-i\omega T/2}(a_0+a_1e^{-i\omega T}+a_2e^{-i2\omega T}+\ldots).$$

2. Pokazać, żę funkcja falowa dana wzorem

$$\psi(x_2,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x_2,t_2;x_1,t_1)\psi(x_1,t_1)\,dx_1,$$

gdzie K jest dane jako całka po trajektoriach, spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2=t_1+\epsilon$, gdzie ϵ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach. Z kolei $x_1=x_2-\eta$. Przedyskutować związek między η a ϵ i przeprowadzić rozwinięćie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1) z dokładnością do wyrazów liniowych w ε. Czy ta metoda pozwala odtworzyć r. Schrödingera „do kwadratu”, jeżeli rozwiniemy z dokładnością do wyrazów ε^2 (proszę nie wykonywać rachunków, tylko zastanowić się nad spozobem dyskretyzacji potencjału). Powtórzyć wyprowadzenie z dokładnością do wyrazów ε ale dla oddziaływania z polem magnetycznym.

3. Wyliczyć propagator cząstki poruszającej się po okręgu. W tym celu należy wsumować propaagaor cząstki swobodnej po wszystkich możliwych „nawinięciach”. Proszę spróbować przepisać orzymany propagator w zmiennych biegunowych wprowadzając moment bezwładności $I=mR^2$ i moment pędu.