Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 10 na dzień 10.12.2012 poniedziałek

godz. 10:30, sala 128

1. Przedyskutować zależność od cechowania wzoru na propagator cząstki w jednorodnym polu magnetycznym.

2. Poziomy Landaua – dokończenie. Rozważyć ruch cząstki naładowanej w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z. W tym celu należy skonstruować hamiltonian korzystając ze znanego uogólnienia z mechaniki klasycznej $\vec{p} \to \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)$ i wybrać $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$.

   Wskazówka: potraktować człon liniowy w B jako zaburzenie i wyrazić go przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji. Znaleźć poprawkę do energii w pierwszym rzędzie dla trzech pierwszych poziomów $n = 0, 1, 2$ i spróbować uogólnić dla dowolnego n.

3. Porównać jawny wynik na poprawkę $\tilde{K}$ z poprzednich ćwiczeń ze wzorem ogólnym wyprowadzonym na wykładzie.

4. Derive the Van Vleck formula

   $$F(T) = \left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}\right)^{1/2}$$

   for the "quantum"part of the propagator

   $$K = F(T)\exp\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{cl}}$$

   for one dimensional problem of a particle moving in potential V. Start from the Schrödinger equation

   $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x, x_0; t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]K(x, x_0; t),$$

   write

   $$K = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S + \ln F + \ldots\right)$$

   and expand K in powers of $\hbar$. Shown that in the first two orders in $\hbar$ the Schrödinger equation reduces to

   $$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\partial_x S)^2 + V(x) = 0, \tag{1}$$

   and

   $$\partial_t(\ln F) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 S + \frac{1}{m}\partial_x S \partial_x(\ln F) = 0. \tag{2}$$

Differenciate (1) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0}$ and show that the equation obtained that way is identical to (2) where $\ln F$ has been replaced by $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}$ up to a constant that can be fixed from the normalization condition of the propagator for $t \to 0$:

$$K(x_b, x_a; t = 0) = \delta(x_b - x_a).$$

5. Consider Euclidean motion (in an inverted potential) of a given energy $E < 0$, leading from $x_1 \to x_2$ ($x_1 < x_2$) in time T. As a potential take $V(x) = \kappa(x^2 - a^2)^2$ with $\kappa = 1/8a^2$. For one instanton-like motion (without turning) it is clear that as $T \to \infty$ then $x_1 \to -a$, $x_2 \to a$ and $E \to 0$. Show that in this limit

$$E = -8a^2 e^{-T}.$$

HINT. Use classical formula for T. In the limit $E \to 0$ the integral will contain a singular part that can be divided into a finite and still singular part by subtracting and adding $((x-a)^2 + 2E)^{-1/2}$. In the finite part one can immediately set $E = 0$. The other part can be calculated exactly for finite, but small E.