Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 8 na dzień 26.11.2012 poniedziałek

godz. 12:15, biblioteka preprintów

1. Przedyskutować zależność od cechowania otrzymanego na poprzednich zajęciach wzoru na propagator cząstki w jednorodnym polu magnetycznym.

2. Poziomy Landaua – dokończenie. Rozważyć ruch cząstki naładowanej w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z. W tym celu należy skonstruować hamiltonian korzystając ze znanego uogólnienia z mechaniki klasycznej $\vec{p} \rightarrow \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)$ i wybrać $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$.

   Wskazówka: potraktować człon liniowy w B jako zaburzenie i wyrazić go przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji. Znaleźć poprawkę do energii w pierwszym rzędzie dla trzech pierwszych poziomów $n = 0, 1, 2$ i spróbować uogólnić dla dowolnego n.

3. *Instanton determinant.* In this problem we will calculate explicitly the ratio of determinants
$$K' = \frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)},$$
   where a double well potential $V(x)$ reads: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ with $\kappa = 1/\left(8a^2\right)$. Prime at the determinant means that the zero eigenvalue (zero mode) is not included, by $\bar{x}(\tau)$ we denote classical trajectory.

   - For $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ with $\kappa = 1/8a^2$ find classical trajectory in Euclidean time (i.e. in reversed potential $-V(x)$) leading from $-a$ to a (instanton) or from a to $-a$ (anty-instanton),
   - Calculate the classical action corresponding to such a trajectory. Use the fact that the total energy is zero. Calculate quantum propagator K.
   - Show that the eigenequation for quantum fluctuations around the classical trajectory (with $\tau_1 = 0$, where τ_1 is the time when the classical trajectory passes through zero):
$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau) \tag{1}$$
     corresponds to the Schrödinger equation for a potential $1/\cosh^2(\tau/2)$ and energy $E_n = \lambda_n - 1$, which is discussed in the "Quantum Mechanics" of Landau and Lifischitz (probl. 5 page. 81 and probl. 4 page 88, Polish edition PWN 1979).

- Transform equation (1) into a hypergeometric equation for function w_n defined below:

$$y_n(\tau) = e^{\alpha\tau} w_n(\tau),$$

where

$$\alpha = \pm\sqrt{-E_n}, \qquad E_n = \lambda_n - 1.$$

Show that the solution reads:

$$y_n(\tau) = \mathcal{N}\left(3\tanh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) - 6\alpha\tanh\left(\frac{\tau}{2}\right) + \left(4\alpha^2 - 1\right)\right) e^{\alpha\tau}.$$

- Find spectrum of the bound states ($E < 0$) for (1). Conditions that solutions vanish at $\tau = \pm\infty$ give quantization of α.
- Next time we shall calculate contribution from the continuous spectrum.