

Mechanika Kwantowa dla doktorantów
zestaw 7 na dzień 19.11.2012 poniedziałek
godz. 10:30, sala 128

1. Cząstka o masie m i ładunku e porusza się w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z . Funkcja Lagrange'a dla tego przypadku ma postać (dlaczego?):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(xy - yx).$$

Wyliczyć propagator dla ruchu od punktu $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ do punktu $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ w czasie T .

Wsakzówka: Wygodnie jest wprowadzić zmienne $x'(t)$ i $y'(t)$, które odpowiadają przejściu do układu obracającego się ze stałą prędkością kątową α . Należy tak dobrać α aby w tym nowym układzie funkcja Lagrange'a rozseparowała się na trzy niezależne funkcje opisujące ruch cząstki swobodnej i dwa oscylatory harmoniczne. Pozwala to na natychmiastowe napisanie propagatora, który następnie trzeba przepisać w zmiennych wyjściowych.

2. In 3 dimensions van Vleck formula takes the following form:

$$F = \text{const. det} \left(-\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial a_i \partial b_j} \right)$$

where the particle moves from point $\vec{a} = (a_1 = x_a, a_2 = y_a, a_3 = z_a)$ to point $\vec{b} = (b_1 = x_b, b_2 = y_b, b_3 = z_b)$. Find the constant by explicit calculation of F from the known action of a particle moving in an external magnetic field along the z axis (problem 1) and compare with the explicit form of the prefactor from the same problem.

3. Poziomy Landaua. Rozważyć ruch cząstki naładowanej w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z . W tym celu należy skonstruować hamiltonian korzystając ze znanego uogólnienia z mechaniki klasycznej $\vec{p} \rightarrow \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)$ i wybrać $\vec{A} = (-By, 0, 0)$, a następnie rozwiązać r. Schrödingera (Landau, Lifszic par.112).
4. Rozwiązać poprzednie zadanie wybierając $\vec{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0)$.

Wsakzówka: potraktować człon liniowy w B jako zaburzenie i wyrazić go przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji. Znaleźć poprawkę do energii w pierwszym rzędzie dla trzech pierwszych poziomów $n = 0, 1, 2$ i spróbować uogólnić dla dowolnego n .