Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 3 na dzień 22.10.2012 poniedziałek

godz. 10:30, sala 128

1. Dokończyć zadanie z poprzedniego zestawu dotyczące całki Hopfa.

2. Punkt siodłowy w jednym wymiarze, wzór Stirlinga.

   Wyprowadzić rozwinięcie asymptotyczne ($z \to \infty$) dla funkcji:

   $$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{z-1}.$$

   WSKAZÓWKA.

   Skorzystać z własności $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$, zmienić zmienne $t = zu$, zapisać całkę jako $\int due^{-zf(u)}$, znaleźć minimum funkcji $f(u)$, rozwinąć $f(u)$ wokół minimum, wykonać całki po du.

3. Punkt siodłowy na płaszczyźnie zespolonej. W tym przypadku zamiast całki po du jak w poprzednim zadaniu mamy całkę po konturze w płasczyźnie zespolonej $d\zeta$. Należy tak dobrać kontur aby funkcja podcałkowa była na większości konturu mała, a tylko w okolicy punktu siodłowego przypominała wzdłuż konturu f. Gaussa.

   (a) Dla całki postaci

   $$I(z) = \int_C d\zeta\, e^{f(z,\zeta)}$$

   wyprowadzić wzór na rozwinięcie asymptotyczne dla $z \to \infty$. W tym celu znaleźć punkt siodłowy ζ_0 (t.j. pierwsza pochodna równa zero) i rozwinąć $f(z,\zeta)$ wokół ζ_0 tak dobierając fazę $(\zeta - \zeta_0)$, aby rozwinięcie to było rzeczywiste. Wykazać, że

   $$I(z) \sim e^{f(z,\zeta_0)} e^{i(\pm\pi - \varphi)/2} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\zeta_0)|}},$$

   gdzie kąt φ jest fazą drugiej pochodnej.

   (b) Zastosować powyższą metodę do znalezienia rozwinięcia asymptotycznego funkcji Hankel'a (Bessel'a):

   $$H^{(1)}_\lambda(z) = -\frac{1}{\pi} \int_L d\zeta\, e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta},$$

   gdzie kontur L ma kształt „schodka”: zaczyna się w $-\infty$ na pionowej osi rzeczywistej i prowadzi do 0, następnie po osi poziomej od 0 do $-\pi$ i dalej pionowo do góry równolegle do osi pionowej do punktu $(-\pi, \infty)$.

4. Find classical trajectory $(x_a, t_a) \to (x_b, t_b)$ and classical action for the harmonic oscillator with external force $F(t)$. Take limit $\omega \to 0$ to obtain classical action for a particle moving in external force. Finally take limit $F \to 0$ to obtain action of a free particle.

   HINT.

   In order to find a trajectory one has to solve inhomogenous differencial equation constructing the appriopriate Green's function. In order to calculate the action, integrate kinetic term by parts and use equation of motion.