Mechanika Kwantowa dla doktorantów
zestaw 2 na dzień 15.10.2012 poniedziałek

1. Wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa (kontynuacja).

   Udowodnić, że dla dwóch niekomutujących operatorów A i B zachodzi

   $$e^A \, e^B = e^C, \tag{1}$$

   gdzie C można wyrazić jako szereg w „zaplecionych” komutatorach typu $[A, \ldots [A, B] \ldots]$. Obliczyć C z dokładnością do trzech komutatorów.

   Na ostatnich ćwiczeniach pokazaliśmy, że:

   $$\dot{C}(t) = \frac{\Delta_{C(t)}}{1 - e^{-\Delta_{C(t)}}} B = \frac{e^{\Delta_{C(t)}} \, \Delta_{C(t)}}{e^{\Delta_{C(t)}} - 1} B. \tag{2}$$

   Aby scałkować ten wzór po t należy dokonać rozwinięcia

   $$\dot{C}(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n(n+1)} (z-1)^n \right] B \ ,$$

   gdzie

   $$z = e^{\Delta_{C(t)}} = e^{\Delta_A} e^{t\Delta_B}$$

   i całkować wyraz po wyrazie. Należy zwrócić uwagę, że $z - 1 = \Delta_A + t\Delta_B + \ldots$jest też szeregiem.

   Wyprowadzenie to można znaleźć w dodatku D podręcznika J.M. Normanda ”Rotations in Quantum Mechanics”.

2. Hopf integral.

   Calculate Hopf integral

   $$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{iax^2}, \ a > 0 \tag{3}$$

   as a contour integral over the complex plane. Choose the contour in such a way that the integral $\int dt \, e^{-bt^2}$ with positive b and real t appears. When the contribution of the large circle can be neglected? Is the phase of the result unique?

3. Lagrange'a function for the harmonic oscillator reads:

   $$L = \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - \frac{m\omega^2}{2} x(t)^2.$$

   Calculate the classical trajectory leading from point $(x_a, t_a) \to (x_b, t_b)$. Calculate classical action along this trajectory.

   HINT: After finding classical trajectory $\bar{x}(t)$, calculate the action integrating by parts and using equations of motion.

4. For certain values $\omega(t_b - t_a) = \omega T$ both classical trajectory and classical action exhibit singularities. Find conditions that make them both finite. Discuss meaning of these conditions.