Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 30 – 13.6.2012

1. Korzystając z zasady najmniejszego działania, wyprowadzić klasyczne równania pola i równania ruchu cząstki w polu dla działania danego wzorem:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{m}{2}\int \dot{\vec{q}}(t)^2 \, dt \\
&+ e\int \left\{ \phi[\vec{q}(t),t] - \frac{1}{c}\,\dot{\vec{q}}\cdot\vec{A}[\vec{q}(t),t] \right\} d^3x\,dt \\
&+ \frac{1}{8\pi}\int \left\{ \left|\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right|^2 - \left|\vec{\nabla}\times\vec{A}\right|^2 \right\} d^3x\,dt,
\end{aligned}
$$

   w którym zmiennymi są: $\phi(\vec{x},t)$, $\vec{A}(\vec{x},t)$ oraz $\vec{q}(t)$.

2. Pokazać, że równania Maxwella bez ładunków i prądów redukują się dla potencjału $\vec{A}$ do równania falowego

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

   Rozwinąć $\vec{A}(\vec{r},t)$ na fale płaskie $\exp\left(i\vec{k}\,\vec{r}\right)$ z zależnymi od czasu amplitudami $\vec{a}(\vec{k},t)$. Pokazać, że amlitudy $\vec{a}$ spełniają równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = |\vec{k}|c$. Sprawdzić, że $\vec{a}\perp\vec{k}$ i że pola $\vec{E}$, $\vec{B}$ oraz wektor falowy $\vec{k}$ są wzajemnie prostopadłe.