Mechanika Kwantowa dla doktorantów
zestaw 29 – 6.6.2012

1. Find the continuum limit od the system from the problem set 27 (Ch. 8-5 in Feynman and Hibbs). Show that it reduces to the scalar field theory.

2. Korzystając z zasady najmniejszego działania, wyprowadzić klasyczne równania pola i równania ruchu cząstki w polu dla działania danego wzorem:

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{2}\int \dot{\vec{q}}(t)^2\,dt \\ &+ e\int \left\{\phi[\vec{q}(t),t] - \frac{1}{c}\,\dot{\vec{q}}\cdot\vec{A}[\vec{q}(t),t]\right\} d^3x\,dt \\ &+ \frac{1}{8\pi}\int \left\{\left|\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right|^2 - \left|\vec{\nabla}\times\vec{A}\right|^2\right\} d^3x\,dt, \end{aligned}$$

   w którym zmiennymi są: $\phi(\vec{x},t)$, $\vec{A}(\vec{x},t)$ oraz $\vec{q}(t)$.

3. Pokazać, że równania Maxwella bez ładunków i prądów redukują się dla potencjału $\vec{A}$ do równania falowego

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

   Rozwinąć $\vec{A}(\vec{r},t)$ na fale płaskie $\exp\left(i\vec{k}\,\vec{r}\right)$ z zależnymi od czasu amplitudami $\vec{a}(\vec{k},t)$. Pokazać, że amlitudy $\vec{a}$ spełniają równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = |\vec{k}|c$. Sprawdzić, że $\vec{a}\perp\vec{k}$ i że pola $\vec{E}$, $\vec{B}$ oraz wektor falowy $\vec{k}$ są wzajemnie prostopadłe.

4. Nienaładowana cząstka o spinie 0 (np. neutralna cząstka π) opisana jest w teorii pola następującą funkcją Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - c^2\left|\vec{\nabla}\phi\right|^2 + \frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\phi^2\right] d^3\vec{r},$$

   gdzie $\phi = \phi(\vec{r},t)$ jest polem skalarnym opisującym tę cząstkę. Jaki wymiar ma pole ϕ ? Jaki wymiar i sens fizyczny ma występująca w lagrangeanie stała μ ? Znaleźć równania ruchu dla pola ϕ. Przeprowadzając analizę fourierowską analogiczną do tej z poprzedniego zadania dla pola $\vec{A}$ wykazać, że energia wzbudzeń pola ϕ dana jest relatywistycznym wzorem Eisteina

$$E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 - \mu^2c^4}.$$