

Mechanika Kwantowa dla doktorantów zestaw 28 – 23.5.2012

1. Find the continuum limit of the system from the previous problems (Ch. 8-5 in Feynman and Hibbs). Show that it reduces to the scalar field theory.
2. Skonstruować znormalizowany stan własny operatora anihilacji (nazywany stanem koherentnym lub kwaziklasycznym):

$$\hat{a} |z\rangle = z |z\rangle. \quad (1)$$

W tym celu rozwinąć $|z\rangle$ w bazie stanów własnych oscylatora harmonicznego, znaleźć i rozwiązać rekurencję dla współczynników tego rozwinięcia.

Wyliczyć średnie \hat{x} i \hat{p} w tym stanie i średnie odchylenia kwadratowe. Sprawdzić zasadę nieoznaczoności.

3. Znaleźć jawną postać (nieznormalizowanej) funkcji falowej stanu $|z\rangle$ w reprezentacji położenia $\psi_z(x) = \langle x | z \rangle$ oraz w przestrzeni pędów $\tilde{\psi}_z(p) = \langle p | z \rangle$. Obie te funkcje można znaleźć rozwiązując równania różniczkowe odpowiadające (1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right) \psi_z(\xi) &= z \psi_z(\xi), \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\pi + \frac{d}{d\pi} \right) \tilde{\psi}_z(\pi) &= z \tilde{\psi}_z(\pi), \end{aligned}$$

gdzie $\pi = p/\sqrt{m\hbar\omega} = -id/d\xi$, $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x = id/d\pi$.

4. Jak wygląda ewolucja w czasie stanu $|z\rangle$? Proszę wyliczyć z zależnego od czasu równania Schrödingera zależność czasową stanów $|n\rangle$ i podstawić do wzoru na $|z\rangle$ uwzględniając znane wyrażenie na energię stanów własnych oscylatora harmonicznego. Zakładając, że w chwili $t = 0$ układ jest w stanie $z = \rho e^{i\varphi}$ pokazać, że w chwili późniejszej t układ jest też w stanie kwaziklasycznym

$$e^{-i\omega t/2} |z(t)\rangle$$

gdzie $z(t) = \rho e^{-i(\omega t - \varphi)}$. Wyliczyć średnie \hat{x} i \hat{p} w tym stanie (najlepiej korzystając z wyników zadania 2).

5. Konstrukcja stanu "kota Schrödingera".

W przedziale czasowym $t \in [0, T]$, dodajemy do hamiltonianu oscylatora harmonicznego człon

$$\hat{W} = g\hbar(\hat{a}^\dagger a)^2. \quad (2)$$

Stała g jest na tyle duża ($g \gg \omega$, $\omega T \ll 1$), że dla $0 \leq t \leq T$

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{osc}} + \hat{W} \simeq \hat{W}. \quad (3)$$

W chwili $t = 0$ układ jest w stanie $|\psi(0)\rangle = |z\rangle$.

- (a) Znaleźć ewolucję czasową stanu $|\psi(t)\rangle$ gdy hamiltonian ma postać (3). W tym celu zapisać $|\psi(t)\rangle$ w bazie stanów $|n\rangle$ i rozwiązać zależne od czasu równanie Schrödingera. Skorzystać z faktu, że $(\hat{a}^\dagger a)^2 |n\rangle = n^2 |n\rangle$.
- (b) Stan $|\psi(T)\rangle$ znacznie się upraszcza dla $T = 2\pi/g$ lub $T = \pi/g$. Jak wyglądają stany $|\psi(T)\rangle$ dla tych wartości T ?
- (c) Wybieramy $T = \pi/2g$. Wykazać, że wtedy

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{e^{-i\pi/4} |z\rangle + e^{i\pi/4} |-z\rangle\}. \quad (4)$$

- (d) Załóżmy, że $z = i\rho$. Przedyskutować fizyczną interpretację stanów $|z\rangle$ i $|-z\rangle$. Ile wynoszą średnie położenia i jak skierowane są średnie pędy w tych stanach? Dla $\rho \rightarrow \infty$ stany $|z\rangle$ i $|-z\rangle$ są makroskopowo różne, dlatego stan $|\psi(T)\rangle$ można uważać za konkretną realizację "kota Schrödingera".