Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 23 – 11.4.2012

godz. 10:15 (antresola)

1. Stan $|\psi\rangle$ jest równocześnie stanem własnym dwóch operatorów hermitowskich A i B, które antykomutują
$$AB + BA = 0.$$
Co możemy powiedzieć o wartościach własnych tych operatorów na stanie $|\psi\rangle$? Przedyskutować przypadek gdy $A = \pi = \pi^{-1} = \pi^\dagger$ jest operatorem parzystości a B operatorem pędu.

2. Proszę rozważyć radialne równanie Schrödingera w potancjale $V(r) \to 0$ dla $r \to \infty$ dla energii $E = \hbar^2 k^2/(2m) > 0$ przyjmując, że funkcja falowa separuje się na część kątową i radialną
$$\psi_{klm}(\vec{r}) = R_{kl}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi).$$
Dla dużych r (lub dla cząstki swobodnej) gdy potencjał znika, równanie to jest znane jako zmodyfikowane równanie Bessela. Rozwiązać to równanie dla $l = 0$ definiując nową funkcję $u(r) = r\, R_{k0}(r)$.

   Aby rozwiązać to równanie dla $l \neq 0$ należy

   - zdefiniować $\chi_{kl}(r) = R_{kl}(r)/r^l$ i wyprowadzić równanie na $\chi_{kl}(r)$,
   - zróżniczkować to równanie po r,
   - zdefiniować nową funkcję $f_{kl}(r) = r\, \chi'_{kl}(r)$,
   - porównać równanie na f_{kl} z wyjściowym równaniem na χ_{kl} i zgadnąć wzór rekurencyjny łączący χ_{kl+1} z χ_{kl},
   - rozwiązać rekurencję i znaleźć $R_{kl}(r)$ dla $l = 1, 2$,
   - znaleźć asymptotykę $R_{kl}(r)$ dla dużych r,
   - startując z wyjściowego równania na $R_{kl}(r)$ znaleźć zachowanie w zerze.

3. Suppose we have solved the radial part of the Schrödinger equation for some central potential $V(r)$ of a finite range r_0. This solution for positive energy $E = \hbar^2 k^2/2m > 0$ can be decomposed in terms of partial waves
$$\psi(\vec{r}) = \sum_l (2l+1) i^l A_l(r) P_l(\cos\vartheta), \tag{1}$$
where $A_l(r)$ are in principle known functions of r (why we decompose this solution into Legendre polynomials rather than in spherical harmonics Y_l^m?). Show that the phase shift is given as
$$\tan\delta_l = \frac{kR\, j'_l(kR) - \beta_l\, j_l(kR)}{kR\, y'_l(kR) - \beta_l\, y_l(kR)}$$

where j_l and y_l are spherical Bessel functions.

HINT

For the scattering problem the wave function should have the following asymptotic form:

$$\psi \to e^{ikz} + f(\theta)\, \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Decomposing (prove it!)

$$e^{ikz} = \sum_l (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

and

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) f_l(\theta) P_l(\cos\theta)$$

one can find asymptotic form of the wave function applying known asymptotic forms of the Bessel functions. Denote a coefficient in front of the outgoing spherical wave e^{ikr} as

$$S_l = e^{2i\delta_l}.$$

This is a definition of the phase shift. Find relation befween f_l and S_l.

Since w know A_l in (1) we can decompose it in terms of Hankel functions (which is the same as decomposing A_l in terms of a Bessel functions. Bessel functions are like sin and cos, while Hankel functions are like exponents):

$$A_l = c_l^{(+)} h_l^{(+)} + c_l^{(-)} h_l^{(-)}$$

where

$$h_l^{(\pm)} = j_l \pm i y_l.$$

Find asymptotics of Hankel functions.

At $r = R \gg r_0$ we can glue ψ with its asymptotic form. This allows to find $c_l^{(\pm)}$. Going back to the decomposition in terms of Bessel functions show that

$$A_l(r) = e^{i\delta_l(k)} \left[j_l(kr)\, \cos\delta_l(k) - y_l(kr)\, \sin\delta_l(k) \right]. \tag{2}$$

Since A_l is known, eq. (2) is in fact an equation for δ_l. In practice (2) is difficult to solve, therefore one applies a trick constructing a quantity β

$$\beta_l = \left. \frac{r}{A_l} \frac{dA_l}{dr} \right|_{r=R}. \tag{3}$$

Note that β is known. Solve (3) for $\tan\delta_l$:

$$\tan\delta_l = \frac{kR\, j_l'(kr) - \beta_l\, j_l(kr)}{kR\, y_l'(kr) - \beta_l\, y_l(kr)}.$$