

Mechanika Kwantowa dla doktorantów
zestaw 22 – 4.4.2012
godz. 10:15 (antresola)

1. Cząstka o spinie $1/2$ jest związana w potencjale sferycznym. Część kątowna funkcji falowej dana jest zatem przez funkcje kuliste a całkowity moment pędu j jest złożeniem spinu i momentu pędu l . Sama funkcja falowa w przypadku nierelatywistycznym jest dwukomponentowym spinorem Ω . Do tej pory wykazaliśmy, że spinory Ω mają następującą postać:

$$\begin{aligned}\Omega_{j,j_3,l=j-1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{bmatrix} \sqrt{j+j_3} Y_{j-1/2,j_3-1/2} \\ \sqrt{j-j_3} Y_{j-1/2,j_3+1/2} \end{bmatrix}, \\ \Omega_{j,j_3,l=j+1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2j+2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{j+1-j_3} Y_{j+1/2,j_3-1/2} \\ \sqrt{j+1+j_3} Y_{j+1/2,j_3+1/2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

- (a) Wykazać, że dla dowolnych j, j_3 zachodzi

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \Omega_{j,j_3,l=j\pm 1/2} = -\Omega_{j,j_3,l=j\mp 1/2}. \quad (1)$$

WSKAZÓWKA

W tym celu proszę skorzystać z faktu, że składowe wektora wodzącego \vec{n} tworzą nieredukowalny operator tensorowy o spinie 1, $O_m^{(1)}$, gdzie $m = -1, 0, 1$. Wynika to z faktu, że

$$\begin{aligned}n_+ &= n_x + in_y = -\sqrt{2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,1}(\theta, \varphi), \\ n_- &= n_x - in_y = \sqrt{2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,-1}(\theta, \varphi), \\ n_z &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \varphi),\end{aligned}$$

co daje

$$n_+ = -\sqrt{2} O_1^{(1)}, \quad n_z = O_0^{(1)}, \quad n_- = \sqrt{2} O_{-1}^{(1)}. \quad (2)$$

Elementy macierzowe operatora $O_m^{(1)}$ można wyrazić przez współczynniki Clebsch-Gordana i zredukowane elementy macierzowe \mathcal{N}_n

$$\begin{aligned}O_m^{(1)} Y_{l,l_3} &= \mathcal{N}_n(l+1, l) \begin{pmatrix} l & 1 & | & l+1 \\ l_3 & m & | & m+l_3 \end{pmatrix} Y_{l+1, m+l_3} \\ &+ \mathcal{N}_n(l, l) \begin{pmatrix} l & 1 & | & l \\ l_3 & m & | & m+l_3 \end{pmatrix} Y_{l, m+l_3} \\ &+ \mathcal{N}_n(l-1, l) \begin{pmatrix} l & 1 & | & l-1 \\ l_3 & m & | & m+l_3 \end{pmatrix} Y_{l-1, m+l_3}.\end{aligned} \quad (3)$$

Wykazać, że

$$\mathcal{N}_n(l, l+1) = -\sqrt{\frac{2l+3}{2l+1}}\mathcal{N}_n(l+1, l), \quad \mathcal{N}_n(l, l) = 0. \quad (4)$$

Pierwsza z tych równości wynika z równości elementów macierzowych

$$\langle l+1, m | n_z | l, m \rangle = \langle l, m | n_z | l+1, m \rangle$$

druga z zachowania parzystości. Korzystając ze wzoru (4) dwa potrzebne we wzorze (3) zredukowane elementy macierzowe można wyrazić przez jedną stałą C_l , którą wygodnie zdefiniować jako:

$$\mathcal{N}_n(l+1, l) = \sqrt{2l+1}C_l.$$

Stałą C_l można wyliczyć z dokładnością do znaku z własności: $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = 1$. Znak można ustalić korzystając z jawnego rachunku np. dla $j = 1/2$.

Alternatywnie element zredukowany $\mathcal{N}_n(l+1, l)$ można wyliczyć oliczając jawnie wybrany element macierzowy, korzystając ze wzoru na wielomiany Legendre'a jako wielokrotnej pochodnej po $d/d \cos(\theta)$ i wykonując wiele razy całkę przez części.

2. Stan $|\psi\rangle$ jest równocześnie stanem własnym dwóch operatorów hermitowskich A i B , które antykomutują

$$AB + BA = 0.$$

Co możemy powiedzieć o wartościach własnych tych operatorów na stanie $|\psi\rangle$? Przedyskutować przypadek gdy $A = \pi = \pi^{-1} = \pi^\dagger$ jest operatorem parzystości a B operatorem pędu.