Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 21 – 28.3.2012

godz. 10:15 (antresola)

1. Stan $|\psi\rangle$ jest równocześnie stanem własnym dwóch operatorów hermitowskich A i B, które antykomutują
$$AB + BA = 0.$$
Co możemy powiedzieć o wartościach własnych tych operatorów na stanie $|\psi\rangle$? Przedyskutować przypadek gdy $A = \pi = \pi^{-1} = \pi^\dagger$ jest operatorem parzystości a B operatorem pędu.

2. Cząstka o spinie 1/2 jest związana w potencjale sferycznym. Część kątowa funkcji falowej dana jest zatem przez funkcje kuliste a całkowity moment pędu j jest złożeniem spinu i momentu pędu l. Sama funkcja falowa w przypadku nierelatywistycznym jest dwukomponentowym spinorem Ω.

   (a) Wykazać, że spionory Ω mają następującą postać:
$$\begin{aligned}
\Omega_{j,j_3,l=j-1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{bmatrix} \sqrt{j+j_3}Y_{j-1/2,j_3-1/2} \\ \sqrt{j-j_3}Y_{j-1/2,j_3+1/2} \end{bmatrix}, \\
\Omega_{j,j_3,l=j+1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2j+2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{j+1-j_3}Y_{j+1/2,j_3-1/2} \\ \sqrt{j+1+j_3}Y_{j+1/2,j_3+1/2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

   (b) Wykazać, że dla dowolnych j, j_3 zachodzi
$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\Omega_{j,j_3,l=j\pm1/2} = -\,\Omega_{j,j_3,l=j\mp1/2}. \tag{1}$$

   WSKAZÓWKA

W tym celu proszę skorzystać z faktu, że składowe wektora wodzącego $\vec{n}$ tworzą nieredukowalny operator tensorowy o spinie 1, $O_m^{(1)}$, gdzie $m = -1, 0, 1$. Wynika to z faktu, że
$$\begin{aligned}
n_+ &= n_x + in_y = -\sqrt{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,1}(\theta,\varphi), \\
n_- &= n_x - in_y = \sqrt{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,-1}(\theta,\varphi), \\
n_z &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0}(\theta,\varphi),
\end{aligned}$$
co daje
$$n_+ = -\sqrt{2}O_1^{(1)},\ n_z = O_0^{(1)},\ n_- = \sqrt{2}O_{-1}^{(1)}. \tag{2}$$

Elementy macierzowe operatora $O_m^{(1)}$ można wyrazić przez współczynniki Clebscha-Gordana i zredukowane elementy macierzowe $\mathcal{N}_n$

$$\begin{aligned}
O_m^{(1)} Y_{l,l_3} \;&=\; \mathcal{N}_n(l+1,l) \left(\begin{array}{cc|c} l & 1 & l+1 \\ l_3 & m & m+l_3 \end{array} \right) Y_{l+1,m+l_3} \\
&+\mathcal{N}_n(l,l) \left(\begin{array}{cc|c} l & 1 & l \\ l_3 & m & m+l_3 \end{array} \right) Y_{l,m+l_3} \\
&+\mathcal{N}_n(l-1,l) \left(\begin{array}{cc|c} l & 1 & l-1 \\ l_3 & m & m+l_3 \end{array} \right) Y_{l-1,m+l_3}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Wykazać, że

$$\mathcal{N}_n(l,l+1) = -\sqrt{\frac{2l+3}{2l+1}} \mathcal{N}_n(l+1,l), \; \mathcal{N}_n(l,l) = 0. \tag{4}$$

Pierwsza z tych równości wynika z równości elementów macierzowych

$$\langle l+1,m|\, n_z \,|l,m\rangle = \langle l,m|\, n_z \,|l+1,m\rangle$$

druga z zachowania parzystości. Korzystając ze wzoru (4) dwa potrzebne we wzorze (3) zredukowane elementy macierzowe można wyrazić przez jedną stałą C_l, którą wygodnie zdefiniować jako:

$$\mathcal{N}_n(l+1,l) = \sqrt{2l+1} C_l.$$

Stałą C_l można wyliczyć z dokładnością do znaku z własności: $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = 1$. Znak można ustalić korzystając z jawnego rachunku np. dla $j = 1/2$.

Alternatywnie element zredukowany $\mathcal{N}_n(l+1,l)$ można wyliczyć oliczając jawnie wybrany element macierzowy, korzystając ze wzoru na wielomiany Legendre'a jako wielokrotnej pochodnej po $d/d\cos(\theta)$ i wykonując wiele razy całkę przez części.