Advanced Quantum Mechanics

problem set number 18
2.3.2012 at 8:30 (431a).

1. Derive commutation relation, *i.e.* calculate the following transition amplitude:

$$\langle\chi|\, m\frac{1}{\epsilon}\left((x_{k+1}-x_k)x_k - x_{k+1}(x_{k+1}-x_k)\right)|\psi\rangle_S\,,$$

   where

$$\langle\chi\,|F|\,\psi\rangle_S = \iint dx_1 dx_2\,\chi^*(x_2)\left[\int_{x_1}^{x_2}[\mathcal{D}(x(t)]\;F[x(t)]\,e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}\right]\psi(x_1).$$

   HINT. Since $x_k = x(t_k)$ and $x_{k+1} = x(t_k+\varepsilon)$ it is enough to consider evolution of the wave function by one step of ε in time (only for expressions involving $x_{k+1}x_k$).

2. Pokazać, że dla oscylatora harmonicznego zachodzą związki:

$$\begin{aligned} < x(t) > &= \overline{x}(t) < 1 > \\ < x(t)x(s) > &= [\overline{x}(t)\overline{x}(s) + g(s,t)] < 1 > \\ < x(t)x(s)x(u) > &= [\overline{x}(t)\overline{x}(s)\overline{x}(u) + \overline{x}(t)g(s,u) + \overline{x}(s)g(t,u) + \overline{x}(u)g(t,s)] < 1 > \end{aligned}$$

   gdzie $\overline{x}(t)$ jest klasyczną trajektorią, a $g(t,s)$ dane jest wzorem:

$$g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega\sin\omega T}\sin\omega(t_2-t)\sin\omega(s-t_1), \quad s<t$$

$$g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega\sin\omega T}\sin\omega(t_2-s)\sin\omega(t-t_1), \quad t<s.$$

   Wskazówka: Wyprowadzić wzór:

$$\left\langle \exp\frac{i}{\hbar}\int dt f(t)x(t)\right\rangle_S = \exp\frac{i}{\hbar}(S'_{cl}-S_{cl}) < 1 >_S$$

   i podstawić do niego znane wyrażenia na dzialanie dla oscylatora bez wymuszenia (S_{cl}) i z wymuszeniem $f(t)$ (S'_{cl}). Wypisując różnicę przekonać się, że:

$$S'_{cl} - S_{cl} = \frac{i}{2\hbar}\int\int f(t)f(s)g(t,s)dtds + \int f(t)\overline{x}(t)dt.$$

   Różniczkując ten wzór ze względu na f otrzymujemy kolejno wzory, o które chodzi w zadaniu.