Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 6 na dzień 30.11.2011 środa

ćwiczenia wyjątkowo o 10:30

1. Cząstka o masie m i ładunku e porusza się w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z. Funkcja Lagrange'a dla tego przypadku ma postać (dlaczego?):

   $$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

   Wyliczyć propagator dla ruchu od punktu $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ do punktu $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ w czasie T.

   Wsakzówka: Wygodnie jest wprowadzić zmienne $x'(t)$ i $y'(t)$, które odpowiadają przejściu do układu obracającego się ze stałą prędkością kątową α. Należy tak dobrać α aby w tym nowym układzie funkcja Lagrange'e rozseparowała się na trzy niezależne funkcje opisujące ruch cząstki swobodnej i dwa oscylatory harmoniczne. Pozwala to na natychmiastowe napisanie propagatora, który następnie trzeba przepisać w zmiennych wyjściowych.

   UWAGA. To zadanie proszę przygotować na osobnych kartkach.

2. Dla propagatora cząstki w polu magnetycznym z zadania 1 sprawdzić uogólniony wzór Van Vleck'a wyliczając

   $$F = \text{const.}\det\left(-\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\vec{a}\partial\vec{b}}\right),$$

   gdzie F jest czynnikiem normalizującym propagator ($K = Fe^{i\cdots}$).

3. Porównując ogólny wzór na propagator oscylatora harmonicznego

   $$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2)\psi_n^*(x_1)\,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t_2 - t_1)\right)$$

   z jawnym wzorem na K znaleźć pierwsze dwie funkcje własne oscylatora $\psi_{1,2}$,oraz odpowiadające im energie własne E_n. W tym celu użyć dla K wzoru

   $$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\,\sin\omega t}}\,e^{\frac{i}{\hbar}S_{\text{cl}}},$$

   gdzie działanie klasyczne zostało wyliczone poprzednio.

   WSKAZÓWKA. Spsób wyznaczania wektorów własnych jest omówiony w podręczniku Feynmana Hibbsa, rozdział 8-1. Warto użyć zmiennych przeskalowanych $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\,x$ oraz $\psi_n(x) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\phi_n(\xi)$. Zapisanie funkcji trygonometrycznych w postaci $e^{\pm i\omega T}$pozwala na rozwinięcie K w szereg

   $$K \sim e^{-i\omega T/2}(a_0 + a_1 e^{-i\omega T} + a_2 e^{-i2\omega T} + \ldots).$$

4. Wyliczyć propagator cząstki poruszającej się po okręgu. W tym celu należy wsumować propaagaor cząstki swobodnej po wszystkich możliwych ńawinięciach". Proszę spróbować przepisać orzymany propagator w zmiennych biegunowych wprowadzając moment bezwładności $I = mR^2$ i moment pędu.