Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 5 na dzień 9.11.2011 środa

1. One slit diffraction (continuation).

   Consider one dimensional problem of a particle moving from $x = 0$ at $t = 0$ to point (x, t) through a screen which the particle reaches at time $t_1 < t$. The screen has a hole of size $2b$ centered around x_0. (This process can be understood in the following way: at time t_1 we block all possible trajectories except those passing through a hole). Calculate the propagator for such a motion.

   In order to simplify calculactions replace the sharp hole by a "Gaussian hole"

$$G(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{for} \quad x < x_0 - b \text{ or } x_0 + b < x \\ \\ 1 \quad \text{for} \quad x_0 - b \leq x \leq x_0 + b \end{cases} \quad \rightarrow \; G(x) = e^{-(x-x_0)^2/2b^2}.$$

   What is the width of the image of this "Gaussian hole" at time t? How does it compare with the classical expectation?

   Since the propagation before and after the slit is free, we can use the formula for a free particle propagator

$$K_0(b, a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}}$$

   and the formula for "folding"the propagators

$$K(b, a) = \int dx_c\, K(b, c)K(c, a).$$

   Here $a = (x_a, t_a)$ etc.

   This problem can be found in the book of Feynman and Hibbs "Quantum Mechanics and Path Integrals" chapt. 3.2.

2. Derive the Van Vleck formula

$$F(T) = \left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}\right)^{1/2}$$

   for the "quantum"part of the propagator

$$K = F(T) \exp\frac{i}{\hbar}S_{\text{cl}}$$

   for one dimensional problem of a particle moving in potential V. Start from the Schrödinger equation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x, x_0; t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]K(x, x_0; t),$$

write

$$K = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S + \ln F + \dots\right)$$

and expand K in powers of $\hbar$. Shown that in the first two orders in $\hbar$ the Schrödinger equation reduces to

$$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\partial_x S)^2 + V(x) = 0, \tag{1}$$

and

$$\partial_t(\ln F) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 S + \frac{1}{m}\partial_x S \partial_x(\ln F) = 0. \tag{2}$$

Differenciate (1) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0}$ and show that the equation obtained that way is identical to (2) where $\ln F$ has been replaced by $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}$ up to a constant that can be fixed from the normalization condition of the propagator for $t \to 0$:

$$K(x_b, x_a; t = 0) = \delta(x_b - x_a).$$

3. Cząstka o masie m i ładunku e porusza się w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z. Funkcja Lagrange'a dla tego przypadku ma postać (dlaczego?):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Wyliczyć propagator dla ruchu od punktu $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ do punktu $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ w czasie T.

Wsakzówka: Wygodnie jest wprowadzić zmienne $x'(t)$ i $y'(t)$, które odpowiadają przejściu do układu obracającego się ze stałą prędkością kątową α. Należy tak dobrać α aby w tym nowym układzie funkcja Lagrange'e rozseparowała się na trzy niezależne funkcje opisujące ruch cząstki swobodnej i dwa oscylatory harmoniczne. Pozwala to na natychmiastowe napisanie propagatora, który następnie trzeba przepisać w zmiennych wyjściowych.