

# Mechanika Kwantowa dla doktorantów

## zestaw 2 na dzień 19.10.2011 środa

1. Wzór Baker-Campbella-Hausdorffa (kontynuacja).

Udowodnić, że dla dwóch niekomutujących operatorów  $A$  i  $B$  zachodzi

$$e^A e^B = e^C, \quad (1)$$

gdzie

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12} \{ [A, [A, B]] - [B, [A, B]] \} - \frac{1}{24}[A, [B, [A, B]]] + \dots$$

W tym celu rozpatrzmy operator  $C(t)$  zdefiniowany jako

$$e^{C(t)} = e^A e^{tB}$$

i wyprowadzić równanie różniczkowe jakie spełnia  $C(t)$ .

W tym celu udowodnić wzór na pochodną eksponenty z operatora  $C(t)$ :

$$\frac{d}{dt} e^{C(t)} = \int_0^1 d\tau e^{\tau C(t)} \dot{C}(t) e^{(1-\tau)C(t)} = \int_0^1 d\tau e^{(1-\tau)C(t)} \dot{C}(t) e^{\tau C(t)}. \quad (2)$$

Następnie zdefiniować operator  $\Delta_X$ , gdzie  $X$  jest pewnym operatorem a działanie  $\Delta_X$  na dany operator  $Y$  dane jest jako:

$$\Delta_X Y = [X, Y]. \quad (3)$$

Jest to wygodny zapis komutatora, gdyż można łatwo (formalnie) zapisać operator odwrotny. Proszę pokazać:

$$e^A B e^{-A} = e^{\Delta_A} B = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots \quad (4)$$

W tym celu należy zdefiniować

$$B(\tau) = e^{\tau A} B e^{-\tau A}, \text{ with } B(0) = B \quad (5)$$

napisać równanie różniczkowe na  $B$  i rozwiązać je.

Korzystając z własności (??) pokazać, że:

$$\dot{C}(t) = \frac{\Delta_{C(t)}}{1 - e^{-\Delta_{C(t)}}} B = \frac{e^{\Delta_{C(t)}} \Delta_{C(t)}}{e^{\Delta_{C(t)}} - 1} B. \quad (6)$$

Aby scałkować ten wzór po  $t$  należy dokonać rozwinięcia

$$\dot{C}(t) = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n(n+1)} (z-1)^n \right] B,$$

gdzie

$$z = e^{\Delta_A} e^{t\Delta_B}$$

i całkować wyraz po wyrazie.

Wyprowadzenie to można znaleźć w dodatku D podręcznika J.M. Normanda "Rotations in Quantum Mechanics".

2. Lagrange function of the harmonic oscillator reads:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - \frac{m\omega^2}{2} x(t)^2.$$

Calculate classical trajectory leading from point  $(x_a, t_a) \rightarrow (x_b, t_b)$ . Calculate classical action along this trajectory.

HINT: After finding classical trajectory  $\bar{x}(t)$ , calculate the action integrating by parts and using equations of motion.

3. For certain values  $\omega(t_b - t_a) = \omega T$  both classical trajectory and classical action exhibit singularities. Find conditions that make them both finite. Discuss the meaning of these conditions.