Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 1 na dzień 14.10.2011 piątek

1. Hopf integral.

   Calculate Hopf integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{iax^2}, \;\; a > 0 \tag{1}$$

   as a contour integral over the complex plane. Choose the contour in such a way that the integral $\int dt\, e^{-bt^2}$ with positive b and real t appears. When the contribution of the large circle can be neglected? Is the phase of the result unique?

2. Pokazać, że funkcja falowa dana wzorem

$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, t_2; x_1, t_1)\psi(x_1, t_1)\, dx_1,$$

   gdzie K jest dane jako całka po trajektoriach, spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2 = t_1 + \epsilon$, gdzie ϵ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach. Z kolei $x_1 = x_2 - \eta$. Przedyskutować związek między η a ϵ i przeprowadzić rozwinięcie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1).

   Dla chętnych: Rozwijając z dokładnością do ϵ^2 sprawdzić, czy odtwarza się kwadrat równania Schrödingera. (Okazuje się, że trzeba zmodyfikować człon potencjalny w Lagragianie.)

3. Wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa (do kontynuacji na ćwiczeniach 19.10.).

   Udowodnić, że dla dwóch niekomutujących operatorów A i B zachodzi

$$e^A\, e^B = e^C, \tag{2}$$

   gdzie

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}\left\{[A, [A, B]] - [B, [A, B]]\right\} - \frac{1}{24}[A, [B, [A, B]]] + ...$$

   W tym celu rozpatrzyć operator $C(t)$ zdefiniowany jako

$$e^{C(t)} = e^A e^{tB}$$

   i wyprowdzić równanie różniczkowe jakie spełnia $C(t)$.

   W tym celu udowodnić wzór na pochodną eksponenty z operatora $C(t)$:

$$\frac{d}{dt}e^{C(t)} = \int_0^1 d\tau\, e^{\tau C(t)}\dot{C}(t)\, e^{(1-\tau)C(t)} = \int_0^1 d\tau\, e^{(1-\tau)C(t)}\dot{C}(t)\, e^{\tau C(t)}. \tag{3}$$

Następnie zdefiniować operator Δ_X, gdzie X jest pewnym operatorem a działanie Δ_X na dany operator Y dane jest jako:

$$\Delta_X Y = [X, Y]. \tag{4}$$

Jest to wygodny zapis komutatora, gdyż można łatwo (formalnie) zapisać operator odwrotny. Proszę pokazać:

$$e^A\, B\, e^{-A} = e^{\Delta_A} B = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots . \tag{5}$$

W tym celu należy zdefiniować

$$B(\tau) = e^{\tau A}\, B\, e^{-\tau A}, \text{ with } B(0) = B \tag{6}$$

napisać równanie różniczkowe na B i rozwiązać je.

Korzystając z własności (**??**) pokazać, że:

$$\dot{C}(t) = \frac{\Delta_{C(t)}}{1 - e^{-\Delta_{C(t)}}} B = \frac{e^{\Delta_{C(t)}}\, \Delta_{C(t)}}{e^{\Delta_{C(t)}} - 1} B. \tag{7}$$

Aby scałkować ten wzór po t należy dokonać rozwinięcia

$$\dot{C}(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n(n+1)} (z-1)^n \right] B \ ,$$

gdzie

$$z = e^{\Delta_A} e^{t \Delta_B}$$

i całkować wyraz po wyrazie.

Wyprowadzenie to można znaleźć w dodatku D podręcznika J.M. Normanda "Rotations in Quantum Mechanics".