Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 12 – 20.12.2010

1. Wyprowadzić relację komutacji operatorów pędu i położenia wyliczając:

$$< \chi | m \frac{1}{\epsilon} \left((x_{k+1} - x_k) x_k - x_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \right) | \psi >,$$

   gdzie

$$\langle \chi \,| F | \, \psi \rangle_S = \iint dx_1 dx_2 \, \chi^*(x_2) \left[\int_{x_1}^{x_2} [\mathcal{D}(x(t)] \; F[x(t)] \, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \right] \psi(x_1).$$

   Zadanie wykonać rozważając ewolucję czasową funkcji falowej o jeden krok czasowy, podobnie jak w przypadku dowodu, że f. falowa spełnia równanie Schrödingera. Zadanie proszę przygotować na osobnych kartkach.

2. W podręczniku Feynmana-Hibbsa jest wyprowadzona tożsamość (wyprowadzona także na wykładzie):

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x(s)} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x(s)} \right\rangle_S ,$$

   która w wersji dyskretnej ma postać

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x_k} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x_k} \right\rangle_S ,$$

   gdzie

$$\langle F \rangle_S = \int [\mathcal{D}(x(t)] \; F[x(t)] \, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}.$$

   Korzystając z tej tożsamości wykazać, że dla cząstki w 3 wymiarach:

$$< (x_{k+1} - x_k)^2 > = < (y_{k+1} - y_k)^2 > = < (z_{k+1} - z_k)^2 > = \frac{i\epsilon\hbar}{m},$$

$$< (x_{k+1}-x_k)(y_{k+1}-y_k) > = < (z_{k+1}-z_k)(y_{k+1}-y_k) > = < (x_{k+1}-x_k)(z_{k+1}-z_k) > = 0,$$

   gdzie opuściliśmy indeks S w wyrażeniach $\langle \ldots \rangle_S$.

3. Wyprowadzenie jednowymiarowego wzoru Van Vlecka'a. Wychodząc z równania Schrödingera dla propagatora K:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K(x, x_0; t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] K(x, x_0; t),$$

   gdzie K spełnia warunek $K(x, x_0; t \to 0) = \delta(x - x_0)$, wyprowadzić formułę Van Vleck'a na kwantowy przyczynek do propagatora ($K = F \exp(i/\hbar \, S)$) F:

$$F(T) = \left(-\frac{1}{2\pi i\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0} \right)^{1/2} .$$

Wskazówka: Wstawić do równania Schrödingera:

$$K = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S + \ln F + \ldots\right)$$

i pogrupować wyrazy przy potęgach $\hbar$. W rzędzie zerowym dostaje się równanie Hamiltona-Jacobiego na działanie klasyczne:

$$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\partial_x S)^2 + V(x) = 0,$$

a w pierwszym rzędzie równanie:

$$\partial_t(\ln F) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 S + \frac{1}{m}\partial_x S \partial_x(\ln F) = 0.$$

Równanie to należy rozwiązać ze względu na $\ln F$. Można to zrobić zauważając, że różniczkując równanie Hamiltona-Jacobiego po x i po x_0 otrzymuje się równanie identyczne z równaniem rzędu $\hbar$, w którym $\ln F$ zastąpiono przez $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}$. Współczynnik proporcjonalności można wyznaczyć z warunku unormowania propagatora w granicy $t \to 0$.