# Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 11 – 13.12.2010

1. Pokazać, że funkcja falowa dana wzorem
$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, t_2; x_1, t_1)\psi(x_1, t_1)\, dx_1,$$
gdzie $K$ jest dane jako całka po trajektoriach, spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2 = t_1 + \epsilon$, gdzie $\epsilon$ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach. Z kolei $x_1 = x_2 - \eta$. Przedyskutować związek między $\eta$ a $\epsilon$ i przeprowadzić rozwinięcie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1).

2. W podręczniku Feynmana-Hibbsa jest wyprowadzona tożsamość (wyprowadzona także na wykładzie):
$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x(s)} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x(s)} \right\rangle_S,$$
która w wersji dyskretnej ma postać
$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x_k} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x_k} \right\rangle_S,$$
gdzie
$$\langle F \rangle_S = \int [\mathcal{D}(x(t)]\ F[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}.$$
Korzystając z tej tożsamości wykazać, że dla cząstki w 3 wymiarach:
$$< (x_{k+1} - x_k)^2 >=< (y_{k+1} - y_k)^2 >=< (z_{k+1} - z_k)^2 >= \frac{i\epsilon\hbar}{m},$$
$$< (x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k) >=< (z_{k+1} - z_k)(y_{k+1} - y_k) >=< (x_{k+1} - x_k)(z_{k+1} - z_k) >= 0,$$
gdzie opuściliśmy indeks $S$ w wyrażeniach $\langle \ldots \rangle_S$.

3. Wyprowadzić relację komutacji operatorów pędu i położenia wyliczając:
$$< \chi | m \frac{1}{\epsilon} \left( (x_{k+1} - x_k)x_k - x_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \right) | \psi >,$$
gdzie
$$\langle \chi \,| F |\, \psi \rangle_S = \iint dx_1 dx_2\, \chi^*(x_2) \left[ \int_{x_1}^{x_2} [\mathcal{D}(x(t)]\ F[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \right] \psi(x_1).$$
Zadanie wykonać rozważając ewolucję czasową funkcji falowej o jeden krok czasowy, podobnie jak w przypadku dowodu, że f. falowa spełnia równanie Schrödingera.