Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 9 – 16.12.2009

1. Otrzymane w zadaniu (z zestawu 5) dotyczącym ruchu cząstki w polu magnetycznym, działanie – a zatem i propagator – nie są translacyjnie niezmiennicze. Jak zmienia się S_{cl} przy przesunięciu całego układu o wektor $\overrightarrow{\varepsilon}$? Niezmienniczość translacyjną można odzyskać wykonując równocześnie transformację cechowania na potencjale $\overrightarrow{A}$ opisującym stałe pole magnetyczne $\overrightarrow{B}$ skierowane wzdłuż osi z. Jaka to transformacja i jak zależy od wektora $\vec{\varepsilon}$?

   Wskazówka: Lagragian z poprzedniego zadania jest w rzeczywistości szczególnym przypadkiem Lagrangianu opisującego oddziaływanie cząstki naładowanej z potencjałem wektorowym:
   $$L = \frac{m}{2}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}^2 + \frac{q}{c}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \cdot \overrightarrow{A}.$$
   Jaką postać ma potencjał $\overrightarrow{A}$, który sprowadza powyższy Lagrangian do poprzedniego?

2. Znaleźć w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo przejścia dla potencjału $V(x,t) = V(x)f(t)$, gdzie $f(t)$ dane jest wzorem:
   $$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\gamma t}, & t < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\gamma t}, & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\gamma(T-t)}, & \frac{T}{2} < t < T, \\ \frac{1}{2}e^{-\gamma(t-T)}, & T < t. \end{cases}$$
   Odpowiedź:
   $$P(n \to m) = \left(\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + (E_m - E_n)^2}\right)^2 |V_{mn}|^2 \frac{4\sin^2\frac{(E_m - E_n)T}{2\hbar}}{(E_m - E_n)^2}.$$
   Porównać z wynikiem, kiedy zaburzenie włączane jest gwałtownie w jednej chwili.

3. Pokazać pod jakimi warunkami w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo przejścia dla potencjału:
   $$V(x,t) = 2\,V(x)\,\cos(\omega t)$$
   wynosi:
   $$\frac{dP(n \to m)}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{mn}|^2 \left\{\delta(E_m - E_n - \hbar\omega) + \delta(E_m - E_n + \hbar\omega)\right\}.$$