Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 8 – 9.12.2009

1. *Wyznacznik instantonowy.*Dokończenie zadania.

   Proszę wylicyć całkę:
   $$I = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \frac{2\delta_k\, k}{1+k^2}\right) = \frac{1}{9}$$
   gdzie
   $$\mathrm{e}^{i\delta_k} = \frac{1+ik}{1-ik}\frac{1+2ik}{1-2ik}.$$

2. Otrzymane w zadaniu (z zestawu 5) dotyczącym ruchu cząstki w polu magnetycznym, działanie – a zatem i propagator – nie są translacyjnie niezmiennicze. Jak zmienia się S_{cl} przy przesunięciu całego układu o wektor $\overrightarrow{\varepsilon}$? Niezmienniczość translacyjną można odzyskać wykonując równocześnie transformację cechowania na potencjale $\overrightarrow{A}$ opisującym stałe pole magnetyczne $\overrightarrow{B}$ skierowane wzdłuż osi z. Jaka to transformacja i jak zależy od wektora $\vec{\varepsilon}$?

   Wskazówka: Lagragian z poprzedniego zadania jest w rzeczywistości szczególnym przypadkiem Lagrangianu opisującego oddziaływanie cząstki naładowanej z potencjałem wektorowym:
   $$L = \frac{m}{2}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}^2 + \frac{q}{c}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\cdot\overrightarrow{A}.$$
   Jaką postać ma potencjał $\overrightarrow{A}$, który sprowadza powyższy Lagrangian do poprzedniego?

3. Poziomy Landaua. Rozważyć ruch cząstki naładowanej w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z. W tym celu należy skonstruować hamiltonian korzystając ze znanego uogólnienia z mechaniki klasycznej $\vec{p} \to \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)$ i wybrać $\vec{A} = (-By, 0, 0)$, a następnie rozwiązać r. Schrödingera (Landau, Lifszic par.112).

4. Rozwiązać poprzednie zadanie wybierając $\vec{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0)$.

   Wskazówka: potraktować człon liniowy w B jako zaburzenie i wyrazić go przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji. Znaleźć poprawkę do energii w pierwszym rzędzie dla trzech pierwszych poziomów $n = 0, 1, 2$ i spróbować uogólnić dla dowolnego n.