Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 3

28.10.2009, godz. 10:15, antresola

1. Zadanie z poprzedniego zestawu.

   Proszę wyliczyć propagator dla swobodnego oscylatora harmonicznego. W tym celu należy rozpisać trajektorie jako sumy trajektorii klasycznej $\bar{x}(t)$ i „naddatku" $y(t)$. Wówczas
   $$K = F \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S_{\rm cl}}$$
   gdzie S_{cl} jest działaniem od trajektorii klasycznej. Wyliczyś $S_{\rm cl}$ (w tym celu wygodnie jest wykonać całkę przez części i skorzystać z równań ruchu). Wykazać, że czynnik F można zpisać jako
   $$F = \sqrt{\frac{1}{\det D}}$$
   gdzie
   $$D_t = -m\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=\bar{x}(t)}.$$
   Wyliczyć $\det D$ dla potencjału oscylatora.

2. Porównując ogólny wzór na propagator oscylatora harmonicznego
   $$K(x_2,t_2;x_1,t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2)\psi_n^*(x_1)\, \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t_2-t_1)\right)$$
   z jawnym wzorem na K z poprzedniego zadania znaleźć pierwsze dwie funkcje własne oscylatora $\psi_{1,2}$,oraz odpowiadające im energie własne E_n.

   WSKAZÓWKA. Spsób wyznaczania wektorów własnych jest omówiony w podręczniku Feynmana Hibbsa, rozdział 8-1. Warto użyć zmiennych przeskalowanych $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\, x$ oraz $\psi_n(x) = (m\omega/\,\pi\hbar)^{1/4}\phi_n(\xi)$. Zapisanie funkcji trygonometrycznych w postaci $e^{\pm i\omega T}$pozwala na rozwinięcie K w szereg
   $$K \sim e^{-i\omega T/2}(a_0 + a_1 e^{-i\omega T} + a_2 e^{-i2\omega T} + \ldots).$$

3. Przedyskutować osobliwości pojawiające się w trajektorii klasycznej dla oscylatora.

4. Proszę wyliczyć propagator dla oscylatora harmonicznego zaburzonego siłą $F(t)$. W tym celu wykazać, że różnica między propagatorem swobodnym a zaburzonym polega tylko na zamianie S_{cl}. W związku z tym wyliczyć S_{cl} dla oscylatora zaburzonego. Zbadać przypadki F =const., $F \to 0$ i/albo $\omega \to 0$. Uwaga: trajektorię klasyczną dla oscylatora zaburzonego należy wyliczyć metodą funkcji Greena. Należy posłużyć się tzw. tożsamościami Greena, powszechnie stosowanymi w elektrodynamice klasycznej.