

Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 2

21.10.2009, godz. 10:15, antresola

1. Zadanie z poprzedniego zestawu.

Wyprowadzić wzory (23) z wykładu na oszacowanie całki jednokrotnej metodą punktu siodłowego. Obliczyć współczynnik F . Jakie musi być nachylenie konturu całkowania przechodzącego przez punkt siodłowy z_0 , żeby końcowa całka była dobrze określona i rzeczywistą całką gaussowską? Jak kierunek tego konturu zależy od fazy $f''(z_0)$ jeśli jest to dowolna liczba zespolona?

2. Proszę przeczytać rozdziały 3-5 do 3-11 z podręcznika Feynmana Hibbsa.
3. Proszę wyliczyć propagator dla swobodnego oscylatora harmonicznego. W tym celu należy rozpisać trajektorie jako sumy trajektorii klasycznej $\bar{x}(t)$ i „naddatku” $y(t)$. Wówczas

$$K = F \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}}$$

gdzie S_{cl} jest działaniem od trajektorii klasycznej. Wyliczyć S_{cl} (w tym celu wygodnie jest wykonać całkę przez części i skorzystać z równań ruchu). Wykazać, że czynnik F można zapisać jako

$$F = \sqrt{\frac{1}{\det D}}$$

gdzie

$$D_t = -m \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=\bar{x}(t)}.$$

Wyliczyć $\det D$ dla potencjału oscylatora.

4. Porównując ogólny wzór na propagator oscylatora harmonicznego

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) \psi_n^*(x_1) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1)\right)$$

z jawnym wzorem na K z poprzedniego zadania znaleźć pierwsze dwie funkcje własne oscylatora $\psi_{1,2}$, oraz odpowiadające im energie własne E_n .

WSKAZÓWKA. Sposób wyznaczania wektorów własnych jest omówiony w podręczniku Feynmana Hibbsa, rozdział 8-1. Warto użyć zmiennych przeskalowanych $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar} x$ oraz $\psi_n(x) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} \phi_n(\xi)$. Zapisanie funkcji trygonometrycznych w postaci $e^{\pm i\omega T}$ pozwala na rozwinięcie K w szereg

$$K \sim e^{-i\omega T/2} (a_0 + a_1 e^{-i\omega T} + a_2 e^{-i2\omega T} + \dots).$$