MECHANIKA KWANTOWA DLA DOKTORANTÓW

Zadania (I) na środę, 14-go października 2009.

1. Obliczyć całkę Hopfa

$$I = \int_{-\infty}^{-\infty} e^{iax^2} dx, \qquad a > 0. \tag{1}$$

Wsk. Zapisać I jako calke konturową na płaszczyźnie zespolonej. Obrócić kontur całkowania tak, żeby otrzymać zwykłą całkę gaussowską, $\int dt \exp -bt^2$, z rzeczywistymi $b(b > 0)$ i t. Jaki jest ten nowy kontur? W jakich warunkach całki po dużym okręgu są do zaniedbania? Czy faza wyniku jest jednoznacznie określona? Jaki jest związek tej fazy z naiwnym wyrażeniem $\sqrt{\pi/(-ia)}$? Przeprowadzić analogiczny rachunek gdy współczynnik nachylenia ia jest dowolną liczbą zespoloną.
2. Wykonując odpowiednie całki gaussowskie, wyprowadzić wzory (28) i (30) podane na wykłdzie. Przeprowadzić całe rozumowanie indukcyjne prowadzące do propagatora cząstki swobodnej (31).
3. Wyprowadzić wzory (23) na oszacowanie całki jednokrotnej metodą punktu siodłowego. Obliczyć współczynnik F. Jakie musi być nachylenie konturu całkowania przechodzącego przez punkt siodłowy z_0, żeby końcowa całka była dobrze określoną i rzeczywistą całką gaussowską? Jak kierunek tego konturu zależy od fazy $f"(z_0)$ jeśli jest to dowolna liczba zespolona?
4. Obliczyć działanie nierelatywistycznej cząstki swobodnej poruszającej się wzdluż trajektorii klasycznej spełniającej warunki brzegowe $x(t_a) = x_a$ i $x(t_b) = x_b$. Powiązać ten wynik z (31) i z przybliżeniem punktu siodłowego.

J. Wosiek.